Mathematik II

60 Minuten · 10 Aufgaben · 30 Punkte

Name: _____

- 60 Minuten
- Taschenrechner erlaubt
- Geodreieck, Zirkel, Lineal und Farbstifte erlaubt
- Nicht mit Bleistift schreiben
- Ohne nachvollziehbaren Rechenweg keine Punkte

---

1 Gesuchte Zahl bestimmen

2 Punkte

Wird von einer Zahl 9 subtrahiert und diese Differenz mit 15 multipliziert, erhält man 9 mehr, als wenn man die Zahl mit 7 multipliziert. Um welche Zahl handelt es sich?

Zahl: _____

---

2 Tore und Durchschnitt

2 Punkte

Von einer Fussballmannschaft wurde die Anzahl Tore fast jedes Feldspielers nach der Saison erfasst. In der Tabelle siehst du, wie viele Tore die einzelnen Feldspieler erzielt hatten. Der Durchschnitt der geschossenen Tore ist 3.2. Man weiss, Spieler 5 hat doppelt so viele Tore geschossen wie Spieler 6. Wie viele Tore hat Spieler 5 geschossen?

Spieler	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
Tore	0	1	6	4	?	?	0	7	5	3

Tore von Spieler 5: _____

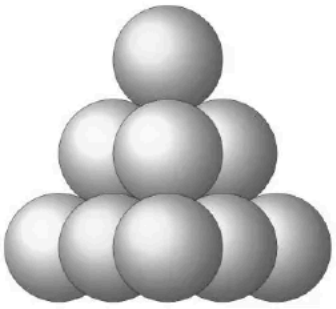
3 Kugelpyramide mit Dreiecksgrundfläche

4 Punkte

Du siehst eine Kugelpyramide von der Seite. Die Pyramide hat eine dreieckige Grundfläche und wird wie folgt aufgebaut:

Aufgabe 3 /4 Pkt.

Du siehst eine Kugelpyramide von der Seite. Die Pyramide hat eine dreieckige Grundfläche und wird wie folgt aufgebaut:



a) Wie viele Kugeln sind notwendig, um diese Pyramide zu bauen?

Anzahl Kugeln: _____ Kugeln

b) Wie viele zusätzliche Kugeln sind notwendig, um die Pyramide um zwei Schichten nach unten zu erweitern?

Zusätzliche Kugeln: _____ Kugeln

c) Wie viele Kugeln sind notwendig, um eine Pyramide mit 7 Schichten zu bauen?

Anzahl Kugeln: _____ Kugeln

4 Strompreis und Photovoltaik

4 Punkte

Ein Haushalt verbraucht jedes Jahr 5200 kWh elektrische Energie. Eine Energieeinheit (kWh) kostet im Jahr 2022 Fr. 0.30. Für das Jahr 2023 wird eine Preissteigerung von 40% vorausgesagt. Die Haushaltsbewohner entscheiden deshalb, eine Photovoltaik-Anlage anzuschaffen, welche einen Viertel des Jahresverbrauchs an Energie durch Solarstrom abdeckt.

Die Kauf- und Einrichtungskosten für die Photovoltaik-Anlage werden in den folgenden Aufgaben nicht berücksichtigt und es wird davon ausgegangen, dass im Jahr 2023 wiederum 5200 kWh elektrische Energie verbraucht werden.

a) Wie hoch ist nun der Durchschnittspreis für eine Energieeinheit im Jahr 2023, wenn die Gesamtkosten auf die ursprünglich verbrauchten 5200 kWh verteilt wird?

Durchschnittspreis pro kWh: _____ Fr.

b) Wie hoch ist die Einsparung durch die Photovoltaik-Anlage im Jahr 2023?

Einsparung: _____ Fr.

---

5 Fussballfeld: Yards, Hektaren, Schildkröte

3 Punkte

Fussballfelder können verschieden gross sein. Oft sind sie 68 Meter breit und 105 Meter lang. Die englische Längeneinheit 1 Yard entspricht 0.9144 Meter.

a) Gib die Breite des angegebenen Fussballfelds in Yards an. (auf 1 Ziffer nach dem Komma runden.)

Breite: _____ Yards

b) Berechne, wie viele Hektaren (ha) das angegebene Feld misst.

Fläche: _____ ha

c) Wie viele Sekunden braucht eine Schildkröte, um das Fussballfeld herumzulaufen, wenn sie sich 0.25 km pro Stunde vorwärts bewegt. Runde das Endresultat auf eine Stelle nach dem Komma.

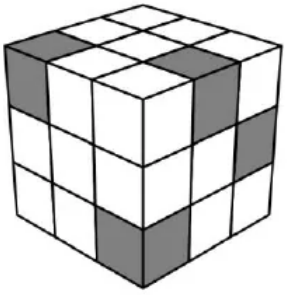
Zeit: _____ s

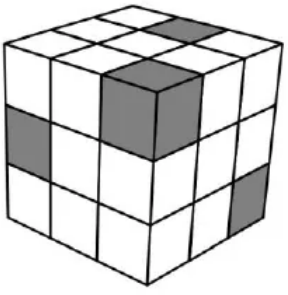
---

6 Würfel aus 27 Würfeln

3 Punkte

Unten ist zweimal derselbe Würfel zu sehen, allerdings aus unterschiedlichen Perspektiven, wobei immer dieselbe Fläche auf dem Boden liegt. Er besteht aus 27 gleich grossen Würfeln, von denen einige grau sind.





a) Von wie vielen Würfeln kann man insgesamt beurteilen, ob sie grau oder weiss sind.

Anzahl Würfel: _____ Würfel

b) Von wie vielen Würfeln kann man sicher sagen, dass sie grau sind?

Anzahl graue Würfel: _____ Würfel

c) Wie viele graue Würfel hat es höchstens?

Höchstens: _____ Würfel

---

7 Quadrate im Punktgitter

3 Punkte

Das folgende Gitter besteht aus 25 Punkten. Zwei benachbarte Punkte, die waagerecht nebeneinander oder senkrecht übereinander liegen, haben immer denselben Abstand.

Verbindet man vier dieser Punkte miteinander, so kann hierbei ein Quadrat entstehen (welches auch schräg zu liegen kommen kann).

Überlege, welche Grössen solche Quadrate prinzipiell haben können. (Es geht nicht darum, alle möglichen Quadrate zu finden, sondern nur, wie gross diese sind).

Zeichne zu jeder der möglichen Quadratgrössen ein entsprechendes Quadrat ein.

Es gibt _____ verschieden grosse Quadratgrössen.

Zeichne stellvertretend für jede Quadratgrösse genau ein Quadrat ins Gitter ein.

Anzahl Quadratgrössen: _____

8 Uhr im Spiegel

1 Punkt

Nina macht den Kopfstand und sieht im Spiegel ihre Armbanduhr (siehe Bild unten). Wie spät ist es?

Uhrzeit: _____ Uhr

9 Sitzreihenfolgen auf der Bank

4 Punkte

Anna, Mia und Lia machen auf ihrer Wanderung Rast und nehmen Platz auf einer Sitzbank.

a) Gib an, wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen es gibt.

Anzahl Reihenfolgen: _____

b) Nun kommen Fred und Paul bei derselben Sitzbank vorbei und möchten sich ebenfalls hinsetzen.

Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen gibt es, wenn die beiden Knaben nebeneinandersitzen möchten und die Mädchen sich beliebig neu hinsetzen?

Anzahl Reihenfolgen: _____

c) Gesamthaft hat die Gruppe drei identische Sonnenbrillen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese drei auf die fünf Jugendlichen zu verteilen, so dass jede Person maximal eine Sonnenbrille erhält?

Anzahl Möglichkeiten: _____

---

10 Streaming-Tarife vergleichen

4 Punkte

Die Streamingplattform Hype verlangt bei einer jährlichen Grundgebühr von 10 Franken zusätzlich 2 Franken pro Film.

Die Konkurrenz-Streamingplattform Fixnet verlangt für jeden Film 2.50 Franken bei einer jährlichen Grundgebühr von 4.50 Franken.

a) Wie viele Filme kann man für 42 Franken jeweils bei beiden Anbietern streamen?

Hype: _____ Filme

Fixnet: _____ Filme

b) Stelle die Gesamtkosten für die gestreamten Filme für beide Plattformen graphisch dar.

c) Nach wie vielen Filmen bezahlt man bei den Streaming-Plattformen genau gleich viel, wenn die Grundgebühren inbegriffen sind?

Anzahl Filme: _____ Filme

Lösungen

Aufnahmeprüfung Gymnasium Bern 2023 Mathematik II 8. Schuljahr. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gesuchte Zahl bestimmen — 2 Punkte

Ergebnis: Die Zahl ist 18.

- Nenne die Zahl x. Die Differenz ist $x - 9$, mal 15 ergibt $(x - 9) \cdot 15$.
- Das ist 9 mehr als $7x$: $(x - 9) \cdot 15 = 7x + 9$
- Klammer auflösen: $15x - 135 = 7x + 9$
- $8x = 144$, also $x = 18$.
- Probe: $(18 - 9) \cdot 15 = 135$ und $7 \cdot 18 + 9 = 135$.

2 Tore und Durchschnitt — 2 Punkte

Ergebnis: Spieler 5 hat 4 Tore geschossen.

- Spieler 6 hat x Tore, Spieler 5 hat $2x$ Tore.
- Durchschnitt = Summe aller Tore : 10 Spieler:

$$\frac{0 + 1 + 6 + 4 + 2x + x + 0 + 7 + 5 + 3}{10} = \frac{26 + 3x}{10} = 3.2$$

- Mal 10: $26 + 3x = 32$, also $3x = 6$ und $x = 2$.
- Gefragt ist Spieler 5: $2x = 4$ Tore.

3 Kugelpyramide mit Dreiecksgrundfläche — 4 Punkte

a) Ergebnis: 10 Kugeln

- Die Pyramide hat 3 Schichten. Jede Schicht ist ein Dreieck aus Kugeln.
- Unterste Schicht: $3 + 2 + 1 = 6$, mittlere: $2 + 1 = 3$, oberste: 1.
- Total: $6 + 3 + 1 = 10$ Kugeln.

b) Ergebnis: 25 zusätzliche Kugeln

- Die neue 4. Schicht ist ein Dreieck mit Seitenlänge 4: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.
- Die neue 5. Schicht: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

- Zusätzlich: $10 + 15 = 25$ Kugeln.

c) **Ergebnis: 84 Kugeln**

- Die Schichten von oben nach unten haben $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$ Kugeln (jedes Mal kommt eine Reihe dazu, die um 1 länger ist).
- Total: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$ Kugeln.
- Anders gezählt: $1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 = 84$.

---

4 Strompreis und Photovoltaik

4 Punkte

a) **Ergebnis: Fr. 0.315 pro kWh**

- Neuer Preis 2023: $0.30 \cdot 1.4 = 0.42$ Fr. pro kWh.
- Nur noch $\frac{3}{4}$ des Stroms wird gekauft: $5200 \cdot \frac{3}{4} = 3900$ kWh.
- Gesamtkosten: $3900 \cdot 0.42 = 1638$ Fr.
- Verteilt auf alle 5200 kWh:

$$\frac{5200 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0.3 \cdot 1.4}{5200} = \frac{1638}{5200} = 0.315 \text{ Fr.}$$

b) **Ergebnis: Fr. 546**

- Gespart wird der Viertel, der nicht mehr gekauft werden muss: $5200 \cdot \frac{1}{4} = 1300$ kWh.
- Zum Preis von 2023 ($0.30 \cdot 1.4 = 0.42$ Fr.):

$$5200 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.3 \cdot 1.4 = 1300 \cdot 0.42 = 546 \text{ Fr.}$$

---

5 Fussballfeld: Yards, Hektaren, Schildkröte

3 Punkte

a) **Ergebnis: 74.4 Yards**

- 1 Yard ist 0.9144 m. Wie oft passt 0.9144 m in 68 m?
- $68 : 0.9144 \approx 74.37$
- Gerundet: 74.4 Yards.

b) **Ergebnis: 0.714 ha**

- Fläche: $68 \cdot 105 = 7140\ \mathrm{m}^2$.
- $1\ \mathrm{ha} = 100\ \mathrm{m} \cdot 100\ \mathrm{m} = 10\,000\ \mathrm{m}^2$.
-

$$\frac{68 \cdot 105}{100 \cdot 100} = 0.714\ \mathrm{ha}$$

c) **Ergebnis: 4982.4 s**

- Umfang des Feldes: $2 \cdot 68 + 2 \cdot 105 = 346\ \mathrm{m} = 0.346\ \mathrm{km}$.
- Zeit = Weg : Geschwindigkeit: $0.346 : 0.25 = 1.384\ \mathrm{h}$.
- In Sekunden: $1.384 \cdot 3600 = 4982.4\ \mathrm{s}$.

---

6 Würfel aus 27 Würfeln

3 Punkte

a) **Ergebnis: 23 Würfel**

- Beide Bilder zeigen die Deckfläche. Zusammen sieht man ausserdem drei der vier Seitenflächen; die vierte Seite und der Boden bleiben verdeckt.
- Nicht zu sehen sind die Würfel, die weder oben noch an einer der drei sichtbaren Seiten liegen: das sind 4 Würfel in den unteren zwei Schichten, je der mittlere Würfel und der mittlere Würfel der verdeckten Seite.
- Beurteilen kann man also $27 - 4 = 23$ Würfel.

b) **Ergebnis: 5 Würfel**

- Zähle die grauen Flächen in beiden Bildern.
- Achtung: Ein Würfel an einer Kante oder Ecke zeigt mehrere graue Flächen, und manche Würfel sieht man in beiden Bildern. Jeden Würfel nur einmal zählen.
- Im linken Bild: (1) die Ecke oben links (grau oben und vorne), (2) oben in der Mitte der rechten Kante (grau oben und rechts), (3) rechte Seite, mittlere Schicht, hinterste Spalte, (4) die vordere Ecke unten (grau links und rechts).
- Im rechten Bild ist das Bild um eine Vierteldrehung gedreht: Der grosse graue Würfel vorne oben ist (1), das graue Feld hinten oben ist (2), das graue Feld rechts unten ist (4). Neu ist nur (5): linke Seite, mittlere Schicht, hinterste Spalte.
- So bleiben 5 verschiedene graue Würfel.

c) **Ergebnis: Höchstens 9 graue Würfel**

- Sicher grau sind die 5 Würfel aus b).
- Die 4 Würfel, die man in a) nicht sehen kann, könnten ebenfalls grau sein.
- Höchstens: $5 + 4 = 9$ graue Würfel.

---

7 Quadrate im Punktgitter

3 Punkte

Ergebnis: Es gibt 8 verschieden grosse Quadrate.

- Eine Quadratseite geht von einem Punkt a Schritte nach rechts und b Schritte nach oben. Damit das ganze Quadrat ins Gitter (4 Schritte breit) passt, muss $a + b \leq 4$ sein.
- **Gerade Quadrate** (4 Stück): Seite 1, 2, 3 oder 4 Schritte; Flächen 1, 4, 9, 16.
- **Schräge Quadrate** (4 Stück): Seite 1 rechts/1 hoch, 2 rechts/1 hoch, 3 rechts/1 hoch, 2 rechts/2 hoch; Flächen 2, 5, 10, 8.
- Alle 8 Flächen sind verschieden, also gibt es 8 Grössen. (1 rechts/2 hoch ergibt dieselbe Grösse wie 2 rechts/1 hoch.)
- Zeichne von jeder Grösse ein Quadrat ins Gitter, wie in der offiziellen Lösung.

---

8 Uhr im Spiegel

1 Punkt

Ergebnis: 01.50 Uhr oder 13.50 Uhr

- Die seitlich gedrehte und gespiegelte «12» steht rechts am Zifferblatt: Dort ist 12 Uhr.

- Weil das Bild gespiegelt ist, läuft die Zeit im Bild gegen den Uhrzeigersinn.
- Der lange Minutenzeiger steht 2 Striche im Uhrzeigersinn neben der 12, also 10 Minuten vor der vollen Stunde: Minute 50.
- Der kurze Stundenzeiger steht knapp 2 Striche gegen den Uhrzeigersinn neben der 12: kurz vor 2 Uhr.
- Es ist 1.50 Uhr (oder 13.50 Uhr).

---

9 Sitzreihenfolgen auf der Bank

4 Punkte

a) Ergebnis: 6

- Für den ersten Platz gibt es 3 Mädchen, für den zweiten noch 2, für den letzten 1.
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Reihenfolgen.

b) Ergebnis: 48

- Die beiden Knaben belegen zwei benachbarte Plätze. Auf 5 Plätzen gibt es dafür 4 Möglichkeiten (Plätze 1–2, 2–3, 3–4, 4–5).
- Fred und Paul können dort auf 2 Arten sitzen: $4 \cdot 2 = 8$.
- Die 3 Mädchen verteilen sich auf die übrigen 3 Plätze: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
- Produktregel: $[4 \cdot 2] \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

c) Ergebnis: 10

- Die Brillen sind gleich, es zählt nur, **welche** 3 der 5 Personen eine bekommen.
- Mit Reihenfolge wären es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Jede Gruppe von 3 Personen wird dabei $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-mal gezählt.
- $60 : 6 = 10$ Möglichkeiten, also $\binom{5}{3} = 10$.
- Einfacher gezählt: Es ist gleich, welche 2 Personen **keine** Brille bekommen: $\binom{5}{2} = 10$.

---

10 Streaming-Tarife vergleichen

4 Punkte

a) Ergebnis: Hype: 16 Filme, Fixnet: 15 Filme

- Hype: $10 + 2x = 42 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$ Filme.
- Fixnet: $4.5 + 2.5x = 42 \Rightarrow 2.5x = 37.5 \Rightarrow x = 15$ Filme.

b) **Ergebnis: Zwei Geraden: Hype beginnt bei 10 Fr. und steigt um 2 Fr. pro Film, Fixnet beginnt bei 4.50 Fr. und steigt um 2.50 Fr. pro Film.**

- Hype: Kosten $= 10 + 2 \cdot x$. Start bei 10 Fr. (0 Filme), pro Film 2 Fr. mehr. Punkte z. B. $(0|10)$, $(5|20)$, $(10|30)$.
- Fixnet: Kosten $= 4.5 + 2.5 \cdot x$. Start bei 4.50 Fr., pro Film 2.50 Fr. mehr. Punkte z. B. $(0|4.5)$, $(5|17)$, $(10|29.5)$.
- Punkte eintragen und je mit dem Lineal zu einer Geraden verbinden, beide Geraden beschriften.
- Fixnet ist steiler und schneidet Hype bei $(11|32)$.

c) **Ergebnis: Nach 11 Filmen (beide kosten 32 Fr.)**

- Gleiche Kosten: $10 + 2x = 4.5 + 2.5x$
- $5.5 = 0.5x$, also $x = 11$.
- Probe: Hype $10 + 22 = 32$ Fr., Fixnet $4.5 + 27.5 = 32$ Fr.
- Im Diagramm aus b) ist das der Schnittpunkt $(11|32)$.