Mathematik II

60 Minuten · 9 Aufgaben · 31 Punkte

Name: _____

- 60 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (nicht programmierbar, ohne Gleichungslöser)
- Geodreieck, Zirkel und Lineal erlaubt
- Alle Berechnungen und Begründungen angeben

---

1 Besucher im Wasserpark

4 Punkte

Im Wasserpark «Aquamarin» gelten folgende Eintrittspreise:

Kinder bis 12 Jahre	CHF 12
Jugendliche	CHF 16
Erwachsene	CHF 44

Gestern waren doppelt so viele Jugendliche wie Kinder im Wasserpark und 28 Erwachsene mehr als Kinder. Der Park hat mit den Eintritten insgesamt CHF 5896 eingenommen, wobei alle Anwesenden bezahlt haben. Berechne, wie viele Kinder, wie viele Jugendliche und wie viele Erwachsene den Wasserpark gestern besucht haben. Für die volle Punktezahl muss die Lösung auf einer Gleichung beruhen.

Kinder: _____

Jugendliche: _____

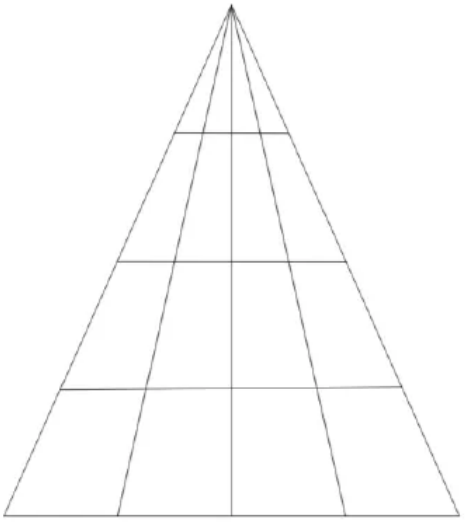
Erwachsene: _____

---

2 Dreiecke in einer Figur

1 Punkt

Wie viele Dreiecke sind in der Figur unten ersichtlich?

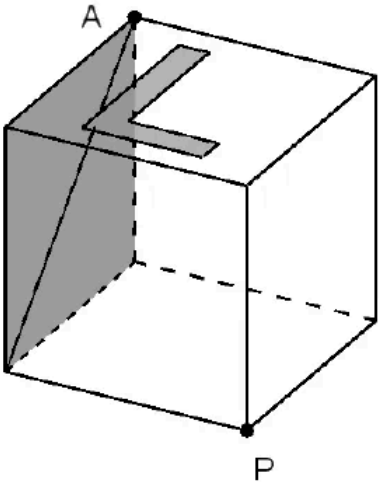


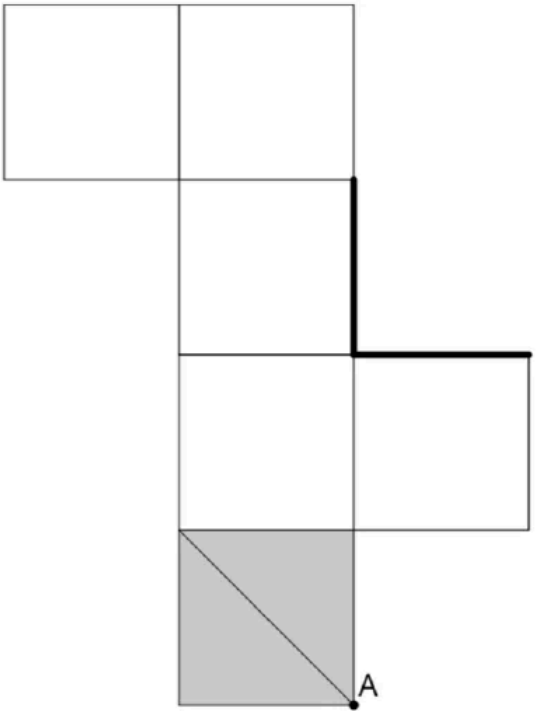
Anzahl Dreiecke: _____

3 Würfel und Würfelnetz

4 Punkte

In der Abbildung links sieht man einen Würfel, der auf der Deckfläche mit dem Buchstaben «L» beschriftet ist. Die linke Aussenseite des Würfels ist grau eingefärbt und mit einer Diagonalen und dem Punkt A gekennzeichnet. In der Abbildung rechts ist das Netz des Würfels dargestellt.





a) Im Netz ist eine Kante fett eingezeichnet. Zeichne die Kante im Würfel ein.

b) Zeichne die Ecke P im Netz ein.

c) Zeichne den Buchstaben „L“ im Netz ein. Achte dabei auf die korrekte Lage des Buchstabens.

---

4 Wasserpegel eines Stausees

4 Punkte

Im folgenden Bild ist der zeitliche Verlauf des Wasserpegels eines Stausees während eines Tages zu sehen. Der Wasserspiegel ist die Höhe der Wasseroberfläche über dem Meeresniveau.



a) In welchem Zeitraum veränderte sich der Wasserspiegel am schnellsten (unabhängig davon, ob er stieg oder sank)?

von: _____ Uhr

bis: _____ Uhr

b) Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Wasserpegel um 4 Uhr morgens bewegte? (Angabe z.B. im m/h.)

Geschwindigkeit: _____ m/h

c) Von 12 bis 13 Uhr flossen 0.75 Millionen Kubikmeter Wasser in den Stausee. Wie gross ist die Wasseroberfläche des Stausees (Fläche mit Luftkontakt)? Nimm dabei an, dass diese Fläche im betrachteten Zeitraum gleich blieb. Gib das Resultat in Quadratkilometern an.

Wasseroberfläche: _____ km²

5 Graue Dreiecke im Quadrat

4 Punkte

Gegeben ist das abgebildete Quadrat.

a) Berechne die Summe der Flächeninhalte der grauen Dreiecke. Die Längen sind in cm angegeben. (Die Skizze ist nicht massstabsgetreu).

Summe der Flächen: _____ cm²

b) Berechne den Anteil der grauen Fläche am Flächeninhalt des gesamten Quadrates. Gib das Resultat in Prozenten an und runde auf zwei Nachkommastellen genau.

Anteil: _____ %

6 Dreiergruppen aus Kugeln

1 Punkt

Es stehen 6 Kugeln zur Verfügung, wobei jeweils 2 Kugeln die gleiche Farbe haben. Drei Kugeln bilden zusammen eine Dreiergruppe. Wie viele unterschiedlich aussehende Dreiergruppen könnten hergestellt werden?

Anzahl Dreiergruppen: _____

7 Bassin mit Zu- und Abfluss

4 Punkte

Ein Bassin hat eine Zuleitung und einen Abfluss. Der Bademeister möchte nun das leere Bassin füllen und öffnet die Zuleitung. Als das Bassin nach 20 Minuten erst zu 20% gefüllt ist, merkt er, dass der Abfluss bisher noch geöffnet war, und schliesst diesen sofort. Danach dauert es noch 1 Stunde, bis das Bassin gefüllt ist.

a) In welcher Zeit könnte das leere Bassin durch die Zuleitung gefüllt werden, wenn der Abfluss von Anfang an geschlossen bleibt?

Zeit: _____ min

b) Welchen Bruchteil eines vollen Bassins entleert der Abfluss pro Minute?

Bruchteil pro Minute: _____

Muster aus Streichhölzern

4 Punkte

a) Mit Streichhölzern wird das folgende Muster aus Quadraten gelegt. In jedes Quadrat werden 2 Streichhölzer gelegt und auf diese Weise wird fortgefahren. Nachfolgend sind n = 3 Quadrate dargestellt. Wie viele Streichhölzer braucht man hierzu bei 3, 5 respektive 10 Quadraten?

3 Quadrate: _____

5 Quadrate: _____

10 Quadrate: _____

b) Gib einen Term an, mit welchem man aus der Anzahl Quadrate (n) die Anzahl Streichhölzer berechnen kann.

Term: _____

c) Nun wird eine Figur wie folgt gelegt (es sind 3x3 Quadrate dargestellt). Wie viele Streichhölzer braucht man für eine Figur mit 6x6 Quadraten?

Anzahl Streichhölzer: _____

9 Würfel-Gebäude aus Perspektiven

5 Punkte

Die folgenden beiden Bilder zeigen dasselbe Würfel-Gebäude aus verschiedenen Perspektiven. Jede Seite der quadratischen Bodenfläche, auf der das Gebäude steht, verläuft in einer der vier Himmelsrichtungen. Im linken Bild blickt man in Richtung Nordwesten. Links sind Norden (N) und Westen (W) eingetragen.

a) In welche Richtung blickt man im rechten Bild? Fülle hierzu die drei leeren Kästchen korrekt aus (jeweils N, W, S oder O einfügen).

Kästchen oben rechts (N / W / S / O): _____

Kästchen unten links (N / W / S / O): _____

Kästchen unten rechts (N / W / S / O): _____

b) Aus wie vielen Würfeln besteht das Würfel-Gebäude?

Anzahl Würfel: _____

c) In den folgenden Würfel-Gebäuden sind die Würfel miteinander verklebt, so dass man sie als Ganzes hochheben und umdrehen kann. Zwei von diesen vier Gebäuden kann man (passend umgedreht) so auf das ursprüngliche Würfel-Gebäude stellen, dass dadurch ein grosser, vollständig ausgefüllter Würfel entsteht. Welche beiden müssen es sein?

Zur Erinnerung nochmals das originale Würfel-Gebäude (unterste Abbildung).

Gebäude: _____

Lösungen

Aufnahmeprüfung Gymnasium Bern 2024 Mathematik II 8. Schuljahr. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Besucher im Wasserpark

4 Punkte

Ergebnis: 53 Kinder, 106 Jugendliche und 81 Erwachsene

- Wähle x = Anzahl Kinder. Dann gibt es $2x$ Jugendliche und $x + 28$ Erwachsene.
- Einnahmen als Gleichung:

$$12x + 16 \cdot 2x + 44 \cdot (x + 28) = 5896$$

- Ausmultiplizieren: $12x + 32x + 44x + 1232 = 5896$
- Zusammenfassen: $88x = 4664$, also $x = 53$.
- Jugendliche: $2 \cdot 53 = 106$, Erwachsene: $53 + 28 = 81$.
- Probe: $12 \cdot 53 + 16 \cdot 106 + 44 \cdot 81 = 636 + 1696 + 3564 = 5896$ ✓

2 Dreiecke in einer Figur

1 Punkt

Ergebnis: 40

- Jedes Dreieck hat seine Spitze oben und entsteht aus **zwei** der Linien, die von der Spitze ausgehen, und **einer** waagrechten Linie.
- Von der Spitze gehen 5 Linien aus. Zwei davon kannst du auf $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Arten wählen.
- Es gibt 4 waagrechte Linien (3 im Inneren und die Grundlinie).
- Anzahl Dreiecke: $10 \cdot 4 = 40$.

3 Würfel und Würfelnetz

4 Punkte

a) **Ergebnis: Die fette Kante ist die hintere rechte senkrechte Kante des Würfels.**

- Falte das Netz von der grauen Fläche aus. Grau ist die linke Seitenfläche, A ihre hintere obere Ecke.
- Das Quadrat über der grauen Fläche wird zur Bodenfläche, das nächste darüber zur rechten Seitenfläche und das oberste der Spalte zur Deckfläche. Das Quadrat rechts neben der Bodenfläche wird zur Rückseite, das Quadrat oben links zur Vorderseite.

- Der senkrechte Teil der fetten Linie ist der rechte Rand der rechten Seitenfläche, also ihre hintere Kante. Der waagrechte Teil ist der obere Rand der Rückseite. Beim Falten fallen beide Teile auf dieselbe Würfelkante.
- Die fette Kante ist also die hintere rechte senkrechte Kante des Würfels (siehe Lösungsgrafik).

b) **Ergebnis: P liegt im Netz am linken Rand der Spalte, auf Höhe des waagrechten Teils der fetten Linie, oder an der linken unteren Ecke des Quadrats oben links. Eine der beiden Stellen genügt.**

- P ist im Würfel die vordere rechte untere Ecke.
- In der Bodenfläche (zweites Quadrat über der grauen Fläche) liegt die Vorderseite links und die rechte Seitenfläche oben. P ist dort die linke obere Ecke, also der linke Rand der Spalte auf Höhe des waagrechten Teils der fetten Linie.
- In der Vorderseite (Quadrat oben links) ist P die linke untere Ecke.
- Es genügt, eine dieser Stellen zu markieren (siehe Lösungsgrafik).

c) **Ergebnis: Das L gehört ins oberste Quadrat der Spalte; dort erscheint es mit dem langen Strich waagrecht oben und dem kurzen Strich links nach unten.**

- Das oberste Quadrat der Spalte wird zur Deckfläche, also gehört das L dorthin.
- Lage: In diesem Quadrat liegt der obere Rand an der grauen Fläche (linke Würfelkante), der linke Rand an der Vorderseite (Quadrat oben links).
- Im Würfel läuft der lange Strich des L der Kante zur grauen Fläche entlang von vorne nach hinten, der kurze Strich geht vorne nach rechts. Die Ecke des L liegt also vorne links.
- Im Netz heisst das: Ecke oben links, langer Strich waagrecht am oberen Rand, kurzer Strich links nach unten (siehe Lösungsgrafik).

4 Wasserpegel eines Stausees

4 Punkte

a) **Ergebnis: Zwischen 16:30 und 19 Uhr**

- Am schnellsten ändert sich der Pegel dort, wo die Kurve am steilsten ist.
- Von 16:30 bis 19 Uhr sinkt der Pegel von 933.8 m auf 932.8 m, also um 1 m in 2.5 h: $\frac{1\,\mathrm{m}}{2.5\,\mathrm{h}} = 0.4\,\mathrm{m/h}$.
- Zum Vergleich: Kein anderes Teilstück ist so steil (z.B. 12–13 Uhr: 0.3 m/h, 3–4:30 Uhr: 0.2 m/h).

b) **Ergebnis:** $0.2\,\mathrm{m/h} = 2\,\mathrm{dm/h}$

- Um 4 Uhr liegt das gerade Stück von 3 Uhr bis 4:30 Uhr.
- Dort steigt der Pegel von 932.6 m auf 932.9 m, also um 0.3 m in 1.5 h.
- $v = \frac{0.3\,\mathrm{m}}{1.5\,\mathrm{h}} = 0.2\,\mathrm{m/h} = 2\,\mathrm{dm/h}$

c) **Ergebnis:** $2.5\,\mathrm{km}^2$

- Von 12 bis 13 Uhr steigt der Pegel von 933.5 m auf 933.8 m, also um 0.3 m.
- Volumen = Fläche · Höhe, also Fläche = Volumen : Höhe:

$$\frac{0.75\,\mathrm{Mio.\ m}^3}{0.3\,\mathrm{m}} = 2.5\,\mathrm{Mio.\ m}^2$$

- $1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$, also $2.5\,\text{Mio. }\mathrm{m}^2 = 2.5\,\mathrm{km}^2$.

---

5 Graue Dreiecke im Quadrat

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $73.5\,\mathrm{cm}^2$

- Das Quadrat hat die Seitenlänge $9 + 3 = 12$ cm. Alle grauen Dreiecke haben ihre Spitze im gleichen Punkt oben.
- Geschickt: Nimm als Grundseite jeweils das Stück auf dem Rand des Quadrats. Die Höhe ist dann der Abstand der Spitze zu diesem Rand.
- Linker Rand: 3 Dreiecke mit Grundseite 3, Höhe 9: $3 \cdot \frac{3 \cdot 9}{2} = 40.5$
- Unterer Rand: 2 Dreiecke mit Grundseite 2, Höhe 12: $2 \cdot \frac{2 \cdot 12}{2} = 24$
- Rechter Rand: 1 Dreieck mit Grundseite 6, Höhe 3: $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$
- Summe: $40.5 + 24 + 9 = 73.5\,\mathrm{cm}^2$

b) **Ergebnis:** $51.04\,\%$

- Fläche des Quadrats: $12 \cdot 12 = 144\,\mathrm{cm}^2$
- Anteil: $\frac{73.5}{144} = 0.5104\ldots \approx 51.04\,\%$

---

6 Dreiergruppen aus Kugeln

1 Punkt

Ergebnis: 7

- Es gibt 3 Farben, je 2 Kugeln. Nenne sie A, A, B, B, C, C.
- Gruppen mit zwei gleichen Kugeln: Wähle die doppelte Farbe (3 Möglichkeiten) und eine der zwei anderen Farben dazu (2 Möglichkeiten): $3 \cdot 2 = 6$ (AAB, AAC, BBA, BBC, CCA, CCB).
- Gruppe mit drei verschiedenen Farben: nur ABC, also 1.
- Drei gleiche geht nicht, es gibt nur 2 Kugeln pro Farbe.
- Total: $3 \cdot 2 + 1 = 7$

---

7 Bassin mit Zu- und Abfluss

4 Punkte

a) **Ergebnis: 75 Minuten**

- Nach dem Schliessen des Abflusses füllt die Zuleitung allein die restlichen 80% in 60 Minuten.
- Für 100% braucht sie also $60 \cdot \frac{5}{4} = 75$ Minuten.

b) **Ergebnis: $\frac{1}{300}$ des Bassininhalts**

- Die Zuleitung füllt in 20 Minuten $\frac{20}{75} = \frac{4}{15}$ des Bassins.
- Tatsächlich waren nach 20 Minuten nur $20\,\% = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ gefüllt.
- Der Abfluss hat in diesen 20 Minuten also $\frac{4}{15} - \frac{3}{15} = \frac{1}{15}$ entleert.
- Pro Minute: $\frac{1}{15} : 20 = \frac{1}{300}$

---

8 Muster aus Streichhölzern

4 Punkte

a) **Ergebnis: 3 Quadrate: 16, 5 Quadrate: 26, 10 Quadrate: 51**

- Das erste Quadrat braucht 4 Hölzer für den Rand und 2 für das Kreuz: 6.
- Jedes weitere Quadrat braucht nur noch 3 Randhölzer (eine Seite teilt es mit dem Nachbarn) und 2 für das Kreuz: 5 mehr.
- 3 Quadrate: $6 + 2 \cdot 5 = 16$
- 5 Quadrate: $6 + 4 \cdot 5 = 26$
- 10 Quadrate: $6 + 9 \cdot 5 = 51$

b) **Ergebnis: $5n + 1$**

- Pro Quadrat kommen 5 Hölzer dazu (3 Randhölzer und 2 im Kreuz).
- Dazu kommt einmal die linke senkrechte Seite ganz am Anfang: 1 Holz.
- Term: $5n + 1$. Probe: $n = 3$ gibt 16 ✓

c) **Ergebnis: 156**

- Waagrechte Hölzer: 7 Linien mit je 6 Hölzern: $7 \cdot 6 = 42$
- Senkrechte Hölzer: ebenso $7 \cdot 6 = 42$
- Kreuze: $6 \cdot 6 = 36$ Quadrate mit je 2 Hölzern: 72
- Total: $42 + 42 + 72 = 156$

9 Würfel-Gebäude aus Perspektiven

5 Punkte

a) **Ergebnis: Man blickt in Richtung Nordosten: oben rechts O, unten links W, unten rechts S.**

- Vergleiche die Ecken der Bodenfläche. Im linken Bild (Blick nach Nordwesten) ist die vorderste Ecke die Südost-Ecke: Dort steht 1 Würfel. Die linke Ecke (Südwest) und die rechte Ecke (Nordost) sind leer.
- Im rechten Bild ist die vorderste Ecke leer, also Südwest oder Nordost. Die rechte Ecke hat 1 Würfel, die linke Ecke einen Turm aus 3 Würfeln.
- Wäre vorne Nordost, läge links die Südost-Ecke mit nur 1 Würfel. Das passt nicht zum Turm. Also ist vorne die Südwest-Ecke, links Nordwest, rechts Südost: Man blickt nach **Nordosten**.
- Die Kästchen: vordere linke Seite = Westen (W), vordere rechte Seite = Süden (S), hintere rechte Seite = Osten (O).

b) **Ergebnis: 23 Würfel**

- Die Bodenfläche ist ein 4×4-Quadrat. Lies für jedes Feld mit beiden Bildern ab, wie hoch der Turm darauf ist. Das rechte Bild zeigt die West- und die Südseite von vorne, das linke die Süd- und die Ostseite.

- Turmhöhen, Reihen von Norden nach Süden, jede Reihe von Westen nach Osten:
  - $3 + 2 + 2 + 0 = 7$
  - $1 + 1 + 4 + 1 = 7$
  - $1 + 3 + 1 + 2 = 7$
  - $0 + 1 + 0 + 1 = 2$
- Kontrolle an den Rändern: Westseite von Süden nach Norden $0, 1, 1, 3$ (rechtes Bild links: leer, eine Mauer aus 2 Würfeln, Turm aus 3). Südseite von Westen nach Osten $0, 1, 0, 1$.
- Total: $7 + 7 + 7 + 2 = 23$

c) **Ergebnis: A und C**

- Der grosse Würfel ist $4 \times 4 \times 4$, er hat also 64 Würfel. Das Original hat 23, es fehlen $64 - 23 = 41$ Würfel.
- Jedes der beiden Gebäude muss für sich allein das Original ergänzen. Auf jedem Feld fehlen $4-$ Turmhöhe Würfel (Reihen von Norden nach Süden, je von Westen nach Osten):
  - $1, 2, 2, 4$
  - $3, 3, 0, 3$
  - $3, 1, 3, 2$
  - $4, 3, 4, 3$
- Das passende Gebäude hat genau diese Turmhöhen, aber spiegelverkehrt, weil es umgedreht wird. Seine Ecken haben also die Höhen $1, 4, 4, 3$.
- **A**: Die vordere Ecke ist 4 hoch, links davon folgen $2, 2, 1$, rechts $3, 2, 3$. Das ist die Nordost-Ecke mit Nordseite und Ostseite, gespiegelt. Passt.
- **C**: Die vordere Ecke ist 1 hoch, links folgen $3, 3, 4$, rechts $2, 2, 4$. Das ist die Nordwest-Ecke mit Westseite und Nordseite, gespiegelt. Passt.
- B und D passen nicht, also: **A und C**.