Mathematik II

60 Minuten · 10 Aufgaben · 30 Punkte

Name: _____

- 60 Minuten
- Taschenrechner erlaubt
- Geodreieck, Zirkel, Lineal und Farbstifte erlaubt
- Nicht mit Bleistift schreiben
- Alle Berechnungen und Begründungen nachvollziehbar angeben

---

1 Gesuchte Zahl bestimmen

2 Punkte

Wird von einer Zahl 9 subtrahiert und diese Differenz mit 15 multipliziert, erhält man 9 mehr, als wenn man die Zahl mit 7 multipliziert. Um welche Zahl handelt es sich?

Zahl: _____

---

2 Alter von Mutter und Grossmutter

2 Punkte

Nina ist 13 Jahre alt. In 3 Jahren ist die Grossmutter doppelt so alt wie Ninas Mutter und in 7 Jahren ist die Grossmutter viermal so alt wie Nina. Wie alt sind die Mutter und die Grossmutter von Nina heute?

Mutter: _____ Jahre

Grossmutter: _____ Jahre

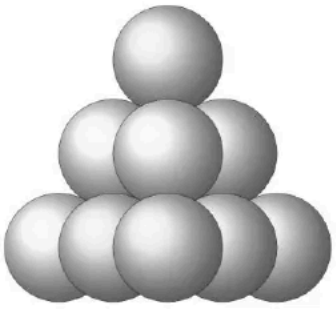
3 Kugelpyramide mit Dreiecksgrundfläche

4 Punkte

Du siehst eine Kugelpyramide von der Seite. Die Pyramide hat eine dreieckige Grundfläche und wird wie folgt aufgebaut:

Aufgabe 3 /4 Pkt.

Du siehst eine Kugelpyramide von der Seite. Die Pyramide hat eine dreieckige Grundfläche und wird wie folgt aufgebaut:



a) Wie viele Kugeln sind notwendig, um diese Pyramide zu bauen?

Anzahl Kugeln: _____

b) Wie viele zusätzliche Kugeln sind notwendig, um die Pyramide um zwei Schichten nach unten zu erweitern?

zusätzliche Kugeln: _____

c) Wie viele Kugeln sind notwendig, um eine Pyramide mit 7 Schichten zu bauen?

Anzahl Kugeln: _____

4 Strompreis und Photovoltaik-Anlage

4 Punkte

Ein Haushalt verbraucht jedes Jahr 5200 kWh elektrische Energie. Eine Energieeinheit (kWh) kostet im Jahr 2022 Fr. 0.30. Für das Jahr 2023 wird eine Preissteigerung von 40% vorausgesagt. Die Haushaltsbewohner entscheiden deshalb, eine Photovoltaik-Anlage anzuschaffen, welche einen Viertel des Jahresverbrauchs an Energie durch Solarstrom abdeckt.

Die Kauf- und Einrichtungskosten für die Photovoltaik-Anlage werden in den folgenden Aufgaben **nicht** berücksichtigt und es wird davon ausgegangen, dass im Jahr 2023 wiederum 5200 kWh elektrische Energie verbraucht werden.

a) Wie hoch ist nun der Durchschnittspreis für eine Energieeinheit im Jahr 2023, wenn die Gesamtkosten auf die ursprünglich verbrauchten 5200 kWh verteilt wird?

Durchschnittspreis pro kWh: _____ Fr.

b) Wie hoch ist die Einsparung durch die Photovoltaik-Anlage im Jahr 2023?

Einsparung: _____ Fr.

---

5 T-Shirt, Wechselkurs und Einnahmen

4 Punkte

In einem Kaufhaus in Deutschland wurde im Jahr 2022 ein Basic-T-Shirt mit 25.30 Euro angeschrieben. David hatte sich ein solches T-Shirt gekauft. Er berechnete, dass ihn dies nach damaligem Wechselkurs Fr. 27.45 gekostet hatte.

a) Wie viele Euros würde man nach Davids damaligem Wechselkurs für Fr. 100.- erhalten? Runde auf 2 Stellen nach dem Komma.

Betrag: _____ Euro

b) Gib aufgrund von Davids damaligem Wechselkurs eine exakte Funktionsgleichung an, die den Preis y in Franken, abhängend vom Preis x in Euro, angibt. Runde auf 3 Stellen nach dem Komma.

$y =$ ____ $\cdot x$: _____

c) Gegenüber dem Vorjahr war dasselbe Basic-T-Shirt 2022 um 10 % teurer (in Euros) geworden. 2021 hatte das Kaufhaus davon 154 Exemplare verkauft. Gegenüber dem Vorjahr wurde im Jahr 2022 betreffend dieses T-Shirts ein Einnahmeverlust von 30 % verzeichnet. Wie viele Exemplare hatte das Kaufhaus 2022 verkauft?

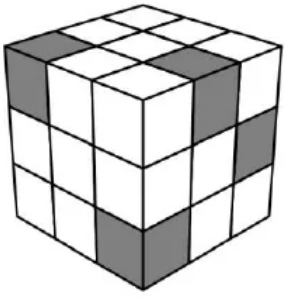
Anzahl Exemplare 2022: _____

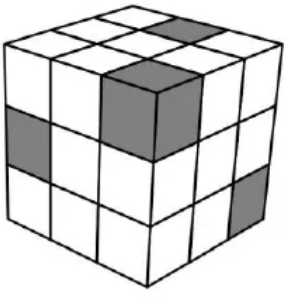
---

6 Würfel aus zwei Perspektiven

3 Punkte

Unten ist zweimal derselbe Würfel zu sehen, allerdings aus unterschiedlichen Perspektiven, wobei immer dieselbe Fläche auf dem Boden liegt. Er besteht aus 27 gleich grossen Würfeln, von denen einige grau sind.





a) Von wie vielen Würfeln kann man insgesamt beurteilen, ob sie grau oder weiss sind.

Anzahl Würfel: _____

b) Von wie vielen Würfeln kann man sicher sagen, dass sie grau sind?

Anzahl Würfel: _____

c) Wie viele graue Würfel hat es höchstens?

höchstens: _____

---

7 Quadrate im Punktgitter

3 Punkte

Das folgende Gitter besteht aus 25 Punkten. Zwei benachbarte Punkte, die waagerecht nebeneinander oder senkrecht übereinander liegen, haben immer denselben Abstand.

Verbindet man vier dieser Punkte miteinander, so kann hierbei ein Quadrat entstehen (welches auch schräg zu liegen kommen kann).

Überlege, welche Grössen solche Quadrate prinzipiell haben können. (Es geht nicht darum, alle möglichen Quadrate zu finden, sondern nur, wie gross diese sind).

Zeichne zu jeder der möglichen Quadratgrössen ein entsprechendes Quadrat ein.

Antwort: Es gibt _____ verschieden grosse Quadratgrössen. Zeichne stellvertretend für jede Quadratgrösse genau ein Quadrat ins Gitter ein.

Anzahl Quadratgrössen: _____

---

8 Uhr im Spiegel

1 Punkt

Nina macht den Kopfstand und sieht im Spiegel ihre Armbanduhr (siehe Bild unten). Wie spät ist es?

Uhrzeit: _____ Uhr

9 Sitzreihenfolgen auf der Bank

4 Punkte

Anna, Mia und Lia machen auf ihrer Wanderung Rast und nehmen Platz auf einer Sitzbank.

a) Gib an, wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen es gibt.

Anzahl Sitzreihenfolgen: _____

b) Nun kommen Fred und Paul bei derselben Sitzbank vorbei und möchten sich ebenfalls hinsetzen.

Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen gibt es, wenn die beiden Knaben nebeneinandersitzen möchten und die Mädchen sich beliebig neu hinsetzen?

Anzahl Sitzreihenfolgen: _____

c) Gesamthaft hat die Gruppe drei identische Sonnenbrillen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese drei auf die fünf Jugendlichen zu verteilen, so dass jede Person maximal eine Sonnenbrille erhält?

Anzahl Möglichkeiten: _____

10 Stausee mit zwei Zuflüssen

3 Punkte

Ein Stausee würde durch zwei Zuflüsse in 8 Tagen gefüllt. Weil der zweite Zufluss aber nach 4 Tagen geschlossen wird, dauert es dann noch weitere 12 Tage, um den See durch den ersten Zufluss allein zu füllen.

a) Wie lange würde der erste Zufluss alleine brauchen, um den ganzen See zu füllen?

Dauer: _____ Tage

b) Wie lange würde der zweite Zufluss alleine brauchen, um den ganzen See zu füllen?

Dauer: _____ Tage

Lösungen

Aufnahmeprüfung Gymnasium Bern 2023 Mathematik II 9. Schuljahr. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gesuchte Zahl bestimmen — 2 Punkte

Ergebnis: Die Zahl ist 18.

- Nenne die Zahl x. Die Differenz ist $x - 9$, mal 15 gibt $(x - 9) \cdot 15$.
- «9 mehr als 7-mal die Zahl» heisst $7x + 9$.
- Gleichung: $(x - 9) \cdot 15 = 7x + 9$
- Ausmultiplizieren: $15x - 135 = 7x + 9$
- $8x = 144 \Rightarrow x = 18$
- Probe: $(18 - 9) \cdot 15 = 135$ und $7 \cdot 18 + 9 = 135$.

2 Alter von Mutter und Grossmutter — 2 Punkte

Ergebnis: Mutter: 35 Jahre, Grossmutter: 73 Jahre

- Beginne mit der Grossmutter, denn sie hängt direkt an Ninas Alter.
- In 7 Jahren ist Nina $13 + 7 = 20$, die Grossmutter also $4 \cdot 20 = 80$. Heute ist sie $80 - 7 = 73$ Jahre alt.
- In 3 Jahren ist die Grossmutter $73 + 3 = 76$. Das ist doppelt so alt wie die Mutter: $76 = 2 \cdot (\text{Alter Mutter})$, also ist die Mutter dann 38.
- Heute ist die Mutter $38 - 3 = 35$ Jahre alt.

3 Kugelpyramide mit Dreiecksgrundfläche — 4 Punkte

a) Ergebnis: 10 Kugeln

- Jede Schicht ist ein Dreieck aus Kugeln. Die Pyramide hat 3 Schichten.
- Unterste Schicht: $3 + 2 + 1 = 6$, mittlere Schicht: $2 + 1 = 3$, oberste Schicht: 1.
- Total: $(3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 10$ Kugeln.

b) Ergebnis: 25 Kugeln

- Die neue 4. Schicht hat Seitenlänge 4: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Kugeln.
- Die neue 5. Schicht hat Seitenlänge 5: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Kugeln.

- Zusätzlich: $10 + 15 = 25$ Kugeln.

c) **Ergebnis: 84 Kugeln**

- Die Schichten haben von oben nach unten $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$ Kugeln (jede Schicht ist eine Dreieckszahl).
- Summe: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$.
- Geschickt gezählt: Die Zahl 1 kommt in allen 7 Schichten vor, die 2 in 6 Schichten usw.: $1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 = 84$ Kugeln.

---

4 Strompreis und Photovoltaik-Anlage

4 Punkte

a) **Ergebnis: Fr. 0.315 pro kWh**

- Preis 2023: $0.30 \cdot 1.4 = 0.42$ Fr. pro kWh.
- Bezahlt werden muss nur noch $\frac{3}{4}$ des Verbrauchs, der Rest kommt gratis vom Dach.
- Gesamtkosten: $5200 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0.3 \cdot 1.4 = 1638$ Fr.
- Auf alle 5200 kWh verteilt: $\frac{1638}{5200} = 0.315$ Fr. pro kWh.
- Kürzer: $\frac{3}{4} \cdot 0.42 = 0.315$ Fr.

b) **Ergebnis: Fr. 546**

- Gespart wird der Strom, den die Anlage liefert: $\frac{1}{4}$ von 5200 kWh $= 1300$ kWh.
- Diese kWh hätten 2023 je $0.3 \cdot 1.4 = 0.42$ Fr. gekostet.
- Einsparung: $5200 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.3 \cdot 1.4 = 546$ Fr.

---

5 T-Shirt, Wechselkurs und Einnahmen

4 Punkte

a) **Ergebnis: 92.17 Euro**

- Fr. 27.45 entsprechen 25.30 Euro.
- Für Fr. 100.-: $25.3 \cdot \frac{100}{27.45} = 92.168\ldots \approx 92.17$ Euro.

b) **Ergebnis:** $y = \frac{27.45}{25.3}x = \frac{2745}{2530}x\ (= 1.085x)$

- Der Frankenpreis ist proportional zum Europreis: $y = m \cdot x$.
- 1 Euro kostet $\frac{27.45}{25.3}$ Franken.
- Also $y = \frac{27.45}{25.3}x = \frac{2745}{2530}x \approx 1.085x$.

c) **Ergebnis: 98 Exemplare**

- Preis 2021: Der Preis 2022 ist 110 % davon, also $25.3 : 1.1 = 23$ Euro.
- Einnahmen 2021: $154 \cdot 23 = 3542$ Euro.
- Einnahmen 2022 (30 % weniger): $3542 \cdot 0.7 = 2479.4$ Euro.
- Anzahl 2022: $2479.4 : 25.3 = 98$ T-Shirts.

---

6 Würfel aus zwei Perspektiven

3 Punkte

a) **Ergebnis: 23 Würfel**

- Zusammen zeigen die beiden Bilder die Deckfläche und drei der vier Seitenflächen. Die Bodenfläche und eine Seitenfläche sieht man nie.
- Nicht sichtbar sind: der Würfel ganz in der Mitte, der mittlere Würfel der untersten Schicht und auf der nie gesehenen Seitenfläche die zwei Würfel in der mittleren Spalte unter der obersten Reihe.
- Das sind 4 Würfel. Von $27 - 4 = 23$ Würfeln kann man die Farbe beurteilen.

b) **Ergebnis: 5 Würfel**

- Ordne die grauen Flächen in beiden Bildern den einzelnen Würfeln zu. Ein Eckwürfel zeigt mehrere Flächen, er zählt aber nur einmal.
- So findest du 5 verschiedene Würfel, die sicher grau sind.

c) **Ergebnis: Höchstens 9 graue Würfel**

- Sicher grau sind die 5 erkennbaren Würfel aus b).
- Die 4 Würfel, die man nicht sieht (siehe a)), könnten alle grau sein.
- Höchstens: $5 + 4 = 9$ graue Würfel.

---

7 Quadrate im Punktgitter

3 Punkte

Ergebnis: Es gibt 8 verschieden grosse Quadrate (4 gerade, 4 schräge).

- Ein Abstand zwischen zwei Nachbarpunkten ist 1 Einheit. Das Gitter ist 4×4 Einheiten gross.
- **Gerade Quadrate:** Seitenlänge 1, 2, 3 oder 4, also Flächen 1, 4, 9 und 16.

- **Schräge Quadrate:** Eine Seite geht a nach rechts und b nach oben. Damit das Quadrat ins Gitter passt, muss $a + b \leq 4$ sein. Möglich sind $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ und $(2, 2)$, mit den Flächen $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 1^2 = 10$ und $2^2 + 2^2 = 8$.
- Das $(2, 2)$-Quadrat ist nicht gleich gross wie ein gerades, denn 8 ist keine Quadratzahl.
- Total: $4 + 4 = 8$ verschiedene Grössen. Zeichne von jeder Grösse ein Quadrat ein (Beispiel siehe Lösungsbild).

---

8 Uhr im Spiegel

1 Punkt

Ergebnis: 01.50 Uhr oder 13.50 Uhr

- Die Ziffer rechts aussen ist die gekippte und gespiegelte «12». Dort ist also oben auf dem Zifferblatt.
- Drehe das Bild in Gedanken so, dass die 12 oben steht, und spiegle es so, dass die 12 wieder richtig lesbar ist.
- Dann zeigt der lange Minutenzeiger auf die 10 (50 Minuten) und der kurze Stundenzeiger steht kurz vor der 2.
- Es ist also 1.50 Uhr bzw. 13.50 Uhr.

---

9 Sitzreihenfolgen auf der Bank

4 Punkte

a) **Ergebnis: 6 Sitzreihenfolgen**

- Für den ersten Platz gibt es 3 Mädchen zur Auswahl, für den zweiten noch 2, für den dritten noch 1.
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Sitzreihenfolgen.

b) **Ergebnis: 48 Sitzreihenfolgen**

- Auf der Bank gibt es 5 Plätze. Die zwei Knaben brauchen zwei benachbarte Plätze: Dafür gibt es 4 Möglichkeiten (Plätze 1–2, 2–3, 3–4, 4–5).
- Fred und Paul können dort auf 2 Arten sitzen (Fred links oder Paul links).
- Die drei Mädchen verteilen sich auf die übrigen 3 Plätze: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten.
- Produktregel: $[4 \cdot 2] \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

c) **Ergebnis: 10 Möglichkeiten**

- Die Brillen sind gleich. Es zählt nur, **welche** 3 der 5 Jugendlichen eine bekommen.
- Mit Reihenfolge wären es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten. Jede Dreiergruppe kommt dabei $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-mal vor.
- $\binom{5}{3} = \frac{60}{6} = 10$ Möglichkeiten.

---

10 Stausee mit zwei Zuflüssen

3 Punkte

a) **Ergebnis: 24 Tage**

- Zusammen füllen beide Zuflüsse den See in 8 Tagen. Nach 4 Tagen ist er also halb voll.
- Die andere Hälfte füllt der erste Zufluss allein in 12 Tagen.
- Braucht er für den ganzen See x Tage, füllt er pro Tag $\frac{1}{x}$: $12 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 24$ Tage.

b) **Ergebnis: 12 Tage**

- In den ersten 4 Tagen füllen beide zusammen die Hälfte des Sees.
- Der erste Zufluss schafft pro Tag $\frac{1}{24}$, der zweite $\frac{1}{x}$.
- $4 \cdot \frac{1}{24} + 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, also $\frac{4}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 12$ Tage.
- Anders gesehen: Zusammen schaffen sie $\frac{1}{8}$ pro Tag, der erste $\frac{1}{24}$. Für den zweiten bleibt $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. Er liefert doppelt so viel Wasser wie der erste und braucht darum nur die halbe Zeit.