Mathematik II

60 Minuten · 9 Aufgaben · 32 Punkte

Name: _____

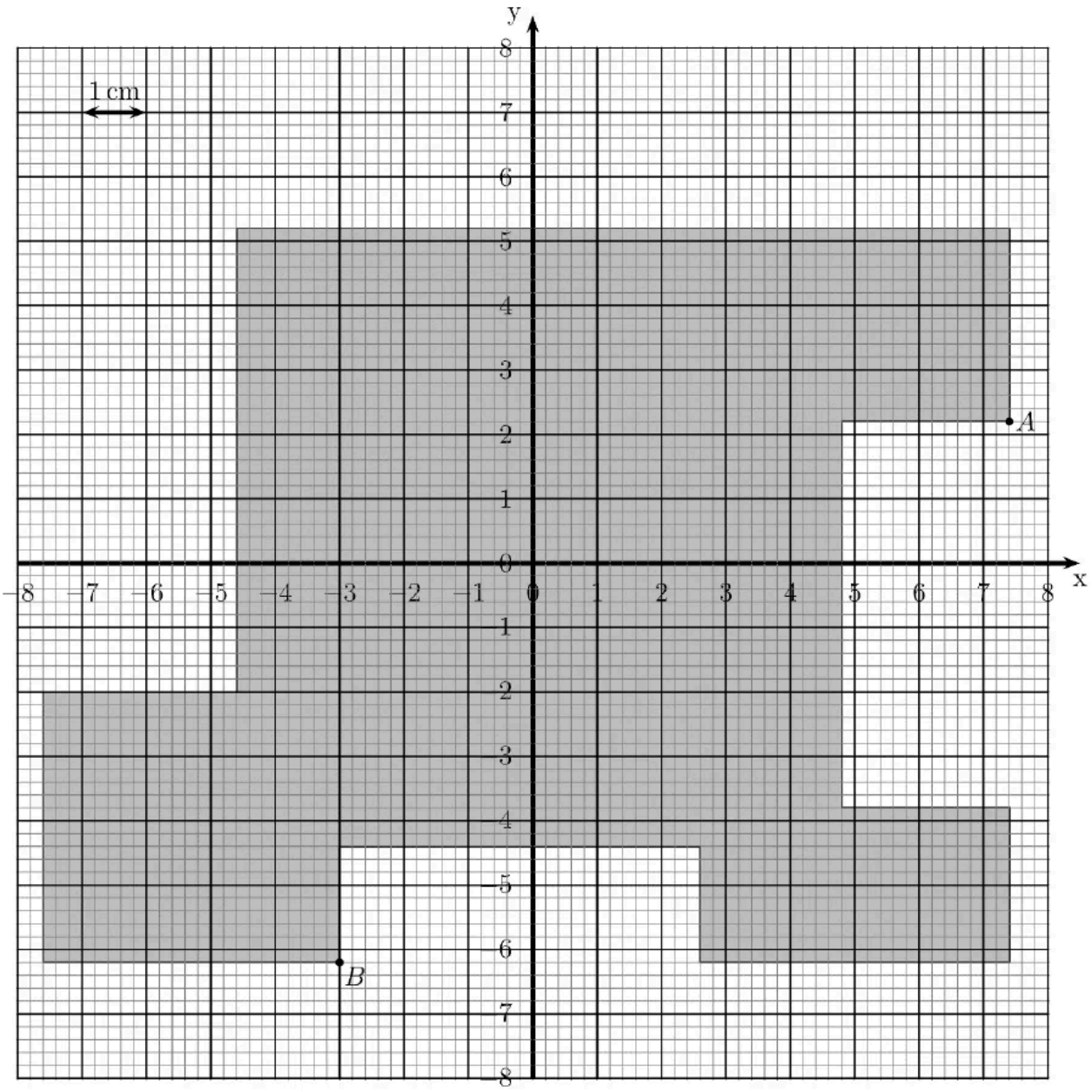
- 60 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (nicht programmierbar, ohne Gleichungslöser)
- Geodreieck, Zirkel und Lineal erlaubt
- Alle Berechnungen und Begründungen angeben
- Nicht mit Bleistift schreiben

---

1 Graue Fläche im Koordinatensystem

4 Punkte

Im folgenden (nicht massstabsgetreuen) Bild ist eine graue Fläche in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Die Einheit des Koordinatensystems ist genau 1 cm lang (wie im Bild oben links angegeben).



a) Berechne den Abstand der Punkte A und B. Gib das Resultat auf den Millimeter genau an.

Abstand AB: _____ cm

b) Wie gross ist die grau eingefärbte Fläche?

Fläche: _____ cm²

2 Rechteck mit Diagonalen zerschneiden

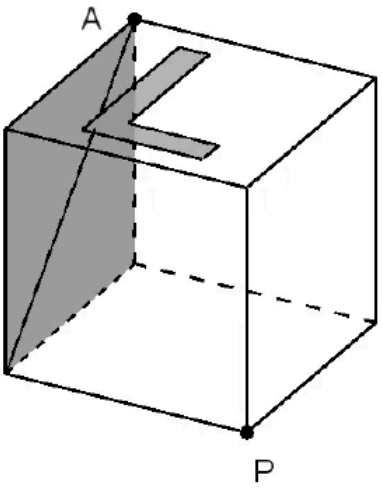
3 Punkte

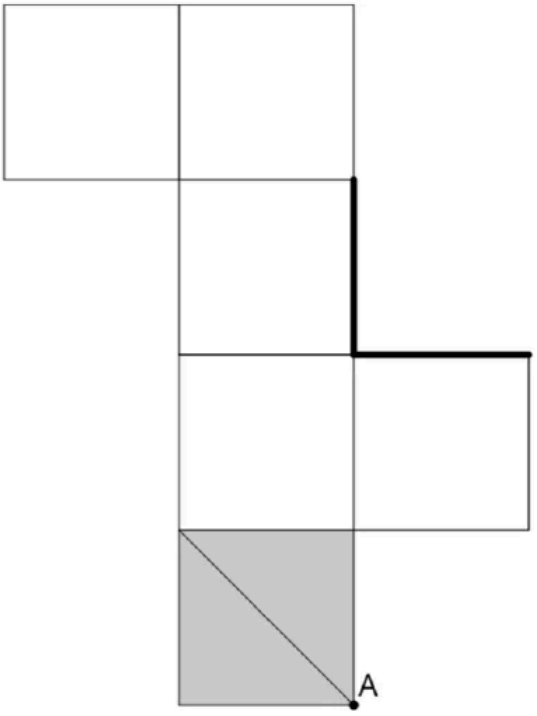
Ein beliebiges Rechteck wird entlang der beiden Diagonalen zerschnitten, so dass vier Dreiecke entstehen. Haben diese vier Dreiecke denselben Flächeninhalt? Begründe deine Antwort anhand einer passenden Zeichnung. Für die Bewertung ist diese zeichnerische Begründung entscheidend. Für eine ja- oder nein-Antwort ohne Begründung gibt es keinen Punkt.

3 Würfel und sein Netz

4 Punkte

In der Abbildung links sieht man einen Würfel, der auf der Deckfläche mit dem Buchstaben «L» beschriftet ist. Die linke Aussenseite des Würfels ist grau eingefärbt und mit einer Diagonalen und dem Punkt A gekennzeichnet. In der Abbildung rechts ist das Netz des Würfels dargestellt.





a) Im Netz ist eine Kante fett eingezeichnet. Zeichne die Kante im Würfel ein.

b) Zeichne die Ecke P im Netz ein.

c) Zeichne den Buchstaben „L“ im Netz ein. Achte dabei auf die korrekte Lage des Buchstabens.

---

4 Wasserpegel eines Stausees

4 Punkte

Im folgenden Bild ist der zeitliche Verlauf des Wasserpegels eines Stausees während eines Tages zu sehen. Der Wasserspiegel ist die Höhe der Wasseroberfläche über dem Meeresniveau.



a) In welchem Zeitraum veränderte sich der Wasserspiegel am schnellsten (unabhängig davon, ob er stieg oder sank)?

b) Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Wasserpegel um 4 Uhr morgens bewegte? (Angabe z.B. im m/h.)

Geschwindigkeit: _____ m/h

c) Von 12 bis 13 Uhr flossen 0.75 Millionen Kubikmeter Wasser in den Stausee. Wie gross ist die Wasseroberfläche des Stausees (Fläche mit Luftkontakt)? Nimm dabei an, dass diese Fläche im betrachteten Zeitraum gleich blieb. Gib das Resultat in Quadratkilometern an.

Wasseroberfläche: _____ km²

---

5 Pyramidenglas füllen

3 Punkte

Aus einem geöffneten Wasserhahn fliesst mit gleichbleibender Geschwindigkeit Wasser. Ein leeres, pyramidenförmiges Glas (siehe Skizze) wird unter den Wasserhahn gehalten und beginnt sich zu füllen. Während des Füllvorgangs verändert sich die Höhe h über dem Glasboden, das Volumen V der Wassermenge im Glas und der Flächeninhalt F der quadratförmigen Wasseroberfläche.

Skizziere die Funktionsgraphen bis zum Zeitpunkt, wo das Glas voll ist.

6 Dreiergruppen aus Kugeln

1 Punkt

Es stehen 6 Kugeln zur Verfügung, wobei jeweils 2 Kugeln die gleiche Farbe haben. Drei Kugeln bilden zusammen eine Dreiergruppe. Wie viele unterschiedlich aussehende Dreiergruppen könnten hergestellt werden?

Anzahl Dreiergruppen: _____

7 Bassin mit Zu- und Abfluss

4 Punkte

Ein Bassin hat eine Zuleitung und einen Abfluss. Der Bademeister möchte nun das leere Bassin füllen und öffnet die Zuleitung. Als das Bassin nach 20 Minuten erst zu 20% gefüllt ist, merkt er, dass der Abfluss bisher noch geöffnet war, und schliesst diesen sofort. Danach dauert es noch 1 Stunde, bis das Bassin gefüllt ist.

a) In welcher Zeit könnte das leere Bassin durch die Zuleitung gefüllt werden, wenn der Abfluss von Anfang an geschlossen bleibt?

Zeit: _____ min

b) Welchen Bruchteil eines vollen Bassins entleert der Abfluss pro Minute?

Bruchteil pro Minute: _____

8 Streichholzmuster mit Quadraten

4 Punkte

a) Mit Streichhölzern wird das folgende Muster aus Quadraten gelegt. In jedes Quadrat werden 2 Streichhölzer gelegt und auf diese Weise wird fortgefahren. Nachfolgend sind n = 3 Quadrate dargestellt. Wie viele Streichhölzer braucht man hierzu bei 3, 5 respektive 10 Quadraten?

3 Quadrate: _____

5 Quadrate: _____

10 Quadrate: _____

b) Gib einen Term an, mit welchem man aus der Anzahl Quadrate (n) die Anzahl Streichhölzer berechnen kann.

Term: _____

c) Nun wird eine Figur wie folgt gelegt (es sind 3x3 Quadrate dargestellt). Wie viele Streichhölzer braucht man für eine Figur mit 6x6 Quadraten?

Anzahl Streichhölzer: _____

9 Würfel-Gebäude aus zwei Perspektiven

5 Punkte

Die folgenden beiden Bilder zeigen dasselbe Würfel-Gebäude aus verschiedenen Perspektiven. Jede Seite der quadratischen Bodenfläche, auf der das Gebäude steht, verläuft in einer der vier Himmelsrichtungen. Im linken Bild blickt man in Richtung Nordwesten. Links sind Norden (N) und Westen (W) eingetragen.

a) In welche Richtung blickt man im rechten Bild? Fülle hierzu die drei leeren Kästchen korrekt aus (jeweils N, W, S oder O einfügen).

Kästchen oben rechts (N / W / S / O): _____

Kästchen unten links (N / W / S / O): _____

Kästchen unten rechts (N / W / S / O): _____

b) Aus wie vielen Würfeln besteht das Würfel-Gebäude?

Anzahl Würfel: _____

c) In den folgenden Würfel-Gebäuden sind die Würfel miteinander verklebt, so dass man sie als Ganzes hochheben und umdrehen kann. Zwei von diesen vier Gebäuden kann man (passend umgedreht) so auf das ursprüngliche Würfel-Gebäude stellen, dass dadurch ein grosser, vollständig ausgefüllter Würfel entsteht. Welche beiden müssen es sein?

Zur Erinnerung nochmals das originale Würfel-Gebäude:

Gebäude: _____

Lösungen

Aufnahmeprüfung Gymnasium Bern 2024 Mathematik II 9. Schuljahr. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Graue Fläche im Koordinatensystem

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\overline{AB} = 13.4\,\text{cm}$

- Lies die Koordinaten ab: $A(7.4 \mid 2.2)$, $B(-3 \mid -6.2)$.
- Waagrechter Unterschied: $7.4 - (-3) = 10.4$, senkrechter Unterschied: $2.2 - (-6.2) = 8.4$.
- Pythagoras: $\sqrt{10.4^2 + 8.4^2} = \sqrt{178.72} \approx 13.4\,\text{cm}$.

b) **Ergebnis:** $123.72\,\text{cm}^2$ **(als richtig gilt bis** $3\,\text{cm}^2$ **Abweichung, also etwa** 120.7 **bis** $126.7\,\text{cm}^2$**)**

Geschickt: Nimm das umschliessende Rechteck und ziehe die drei weissen Ausschnitte ab.

- Umschliessendes Rechteck: von $x = -7.6$ bis 7.4 (Breite 15) und von $y = -6.2$ bis 5.2 (Höhe 11.4): $15 \cdot 11.4 = 171$.
- Ausschnitt oben links (x von -7.6 bis -4.6, y von -2 bis 5.2): $3 \cdot 7.2 = 21.6$.
- Ausschnitt rechts (x von 4.8 bis 7.4, y von -3.8 bis 2.2): $2.6 \cdot 6 = 15.6$.
- Ausschnitt unten (x von -3 bis 2.6, y von -6.2 bis -4.4): $5.6 \cdot 1.8 = 10.08$.
- Fläche: $171 - (21.6 + 15.6 + 10.08) = 123.72\,\text{cm}^2$.
- Weil man die Werte nur ablesen kann, gilt ein Resultat bis $3\,\text{cm}^2$ daneben noch als richtig.

2 Rechteck mit Diagonalen zerschneiden

3 Punkte

Ergebnis: Ja, alle vier Dreiecke haben denselben Flächeninhalt.

- Zeichne durch den Schnittpunkt der Diagonalen die beiden Mittellinien (parallel zu den Seiten). Sie teilen das Rechteck in vier gleich grosse Teil-Rechtecke.
- Jedes Teil-Rechteck wird durch eine halbe Diagonale in zwei gleich grosse Dreiecke geteilt (Symmetrie).
- Jedes der vier Diagonalen-Dreiecke besteht aus genau zwei solchen kleinen Dreiecken, also sind alle vier gleich gross.

- Mit Seitenlängen a und b gerechnet: Das Dreieck mit Grundseite a hat die Höhe $\frac{b}{2}$, das mit Grundseite b die Höhe $\frac{a}{2}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b = \frac{ab}{4}$$

---

3 Würfel und sein Netz

4 Punkte

a) **Ergebnis: Die fette Kante ist die hintere rechte senkrechte Kante des Würfels.**

- Orientiere dich an der grauen Fläche mit A: Sie ist im Netz das unterste Quadrat, im Würfel die linke Seite.
- Falte das Netz in Gedanken um diese Fläche herum zusammen und verfolge, wo die fette Kante landet.
- Sie wird zur hinteren rechten senkrechten Kante (siehe Lösungsbild).

b) **Ergebnis: Siehe Lösungsbild (eine eingezeichnete Lage von P genügt).**

- P ist im Würfel die vordere untere Ecke.
- Falte das Netz in Gedanken von der grauen Fläche aus zusammen und suche die Ecke, an der dieselben Flächen zusammenstossen. Im Netz liegt P an mehreren Stellen; eine davon genügt (siehe Lösungsbild).

c) **Ergebnis: Das L gehört ins oberste Quadrat der mittleren Spalte, so gedreht wie im Lösungsbild.**

- Falte das Netz in Gedanken von der grauen Fläche aus zusammen: Die Deckfläche ist das oberste Quadrat der mittleren Spalte.
- Für die Lage des L: Prüfe, an welche Kanten der Deckfläche im Würfel die graue Seite und die vordere Seite grenzen, und zeichne das L im Netz entsprechend gedreht ein (siehe Lösungsbild).

---

4 Wasserpegel eines Stausees

4 Punkte

a) **Ergebnis: Zwischen 16:30 und 19 Uhr.**

- Am schnellsten ändert sich der Pegel dort, wo der Graph am steilsten ist.
- Von 16:30 bis 19 Uhr sinkt er um $1\,\mathrm{m}$ in $2.5\,\mathrm{h}$, also $0.4\,\mathrm{m/h}$.
- Zum Vergleich: 12–13 Uhr nur $0.3\,\mathrm{m/h}$, 3–4:30 Uhr und 7:30–10:30 Uhr je $0.2\,\mathrm{m/h}$.

b) **Ergebnis:** $v = 0.2\,\mathrm{m/h} = 2\,\mathrm{dm/h}$

- Um 4 Uhr liegt der Pegel im Anstieg von 3 Uhr ($932.6\,\mathrm{m}$) bis 4:30 Uhr ($932.9\,\mathrm{m}$).
- Steigung: $\frac{0.3\,\mathrm{m}}{1.5\,\mathrm{h}} = 0.2\,\mathrm{m/h}$ (gleich wie $\frac{0.1\,\mathrm{m}}{0.5\,\mathrm{h}}$).

c) **Ergebnis:** $2.5\,\mathrm{km}^2$

- Von 12 bis 13 Uhr steigt der Pegel von $933.5\,\mathrm{m}$ auf $933.8\,\mathrm{m}$, also um $0.3\,\mathrm{m}$.
- Volumen = Fläche · Höhe, also Fläche = Volumen : Höhe:

$$\frac{750\,000\,\mathrm{m}^3}{0.3\,\mathrm{m}} = 2\,500\,000\,\mathrm{m}^2$$

- $1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$, also $2.5\,\mathrm{km}^2$.

---

5 Pyramidenglas füllen

3 Punkte

Ergebnis: h: steigt zuerst schnell, dann immer langsamer (Kurve nach rechts abflachend). V: Gerade durch den Ursprung. F in Abhängigkeit von h: steigt zuerst langsam, dann immer schneller.

- V **gegen Zeit:** Es fliesst gleichmässig Wasser zu, also wächst V gleichmässig: eine steigende Gerade ab dem Ursprung.
- h **gegen Zeit:** Das Glas ist unten eng und wird nach oben breiter. Dieselbe Wassermenge hebt den Pegel unten stark, oben immer weniger. Der Graph startet steil und wird immer flacher.
- F **gegen** h**:** Die Seitenlänge des Wasserquadrats wächst proportional zu h, die Fläche also mit h^2. Der Graph startet flach im Ursprung und wird immer steiler (Parabelast).

---

6 Dreiergruppen aus Kugeln

1 Punkt

Ergebnis: $3 \cdot 2 + 1 = 7$

- Es gibt 3 Farben mit je 2 Kugeln, z. B. rot, blau, grün.

- Zwei gleiche und eine andere: 3 Möglichkeiten für die doppelte Farbe, dazu je 2 für die dritte Kugel: $3 \cdot 2 = 6$.
- Alle drei verschieden: 1 Möglichkeit.
- Drei gleiche gehen nicht (nur 2 Kugeln pro Farbe).
- Total: $6 + 1 = 7$.

---

7 Bassin mit Zu- und Abfluss

4 Punkte

a) **Ergebnis: 75 Minuten**

- Nach dem Schliessen des Abflusses füllt die Zuleitung allein die restlichen 80% in 60 Minuten.
- Für 100% braucht sie also $60 \cdot \frac{5}{4} = 75$ Minuten.

b) **Ergebnis: $\frac{1}{300}$ des Bassininhalts**

- In 20 Minuten bringt die Zuleitung $\frac{20}{75} = \frac{4}{15}$ einer Füllung.
- Im Bassin waren danach aber nur $20\% = \frac{1}{5}$. Der Abfluss hat also in diesen 20 Minuten $\frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{4}{15} - \frac{3}{15} = \frac{1}{15}$ entleert.
- Pro Minute: $\frac{1}{15} : 20 = \frac{1}{300}$ des Bassininhalts.

---

8 Streichholzmuster mit Quadraten

4 Punkte

a) **Ergebnis: 16, 26, 51**

- Ein Quadrat braucht 4 Hölzer für den Rand und 2 für das Kreuz: 6.
- Jedes weitere Quadrat teilt eine Seite mit dem vorherigen und braucht nur 3 Randhölzer + 2 fürs Kreuz = 5 mehr.
- 3 Quadrate: $6 + 2 \cdot 5 = 16$; 5 Quadrate: $6 + 4 \cdot 5 = 26$; 10 Quadrate: $6 + 9 \cdot 5 = 51$.

b) **Ergebnis: $5n + 1$**

- Pro Quadrat kommen 5 Hölzer dazu (3 Randhölzer + 2 fürs Kreuz), und ganz links steht ein zusätzliches senkrechtes Holz.
- Also: $5n + 1$. Kontrolle: $n = 3$ ergibt 16.

c) **Ergebnis: 156**

- Waagrechte Hölzer: 7 Linien mit je 6 Hölzern: $7 \cdot 6 = 42$.
- Senkrechte Hölzer: ebenso 42.
- Kreuze: 36 Quadrate mit je 2 Hölzern: 72.
- Total: $42 + 42 + 72 = 156$.

---

9 Würfel-Gebäude aus zwei Perspektiven

5 Punkte

a) **Ergebnis: Man blickt Richtung Nordosten: oben rechts O, unten links W, unten rechts S.**

- Suche markante Teile in beiden Bildern, z. B. den höchsten Turm (4 Würfel) und den schwarz-weissen L-förmigen Teil.
- Vergleiche, wo diese Teile im linken Bild bezüglich N und W liegen, und übertrage das aufs rechte Bild.
- So siehst du: Die vordere linke Seite ist Westen, die vordere rechte Süden, hinten rechts liegt Osten. Man blickt also nach Nordosten.

b) **Ergebnis: 23 Würfel**

Bestimme für jedes der 16 Bodenfelder die Turmhöhe, mithilfe beider Bilder. Turmhöhen in Viererreihen von Norden nach Süden (jede Reihe von Westen nach Osten):

- $3 + 2 + 2 + 0$
- $1 + 1 + 4 + 1$
- $1 + 3 + 1 + 2$
- $0 + 1 + 0 + 1$

Summe: $7 + 7 + 7 + 2 = 23$ Würfel.

c) **Ergebnis: A und C**

- Der grosse Würfel ist $4 \times 4 \times 4$, hat also 64 Würfel. Das Original hat 23, das fehlende Stück also $64 - 23 = 41$ Würfel.
- Über jedem Feld fehlen $4-$ Turmhöhe Würfel. Mit den Turmhöhen aus b) (Reihen von Norden nach Süden, jede von Westen nach Osten):

	W			O
N	1	2	2	4
	3	3	0	3
	3	1	3	2
S	4	3	4	3

- Das gesuchte Gebäude hat genau diese Säulenhöhen (über dem 4er-Turm bleibt ein Loch). Umgedreht hingestellt wie in den Bildern A bis D sind die Säulen dieselben, nur seitenverkehrt angeordnet.
- Prüfe die Ecken und Ränder: Die Ecken des Stücks haben die Höhen 1, 4, 4 und 3.
- **A:** vordere Ecke 4, Ränder $4, 2, 2, 1$ und $4, 3, 3, 3$. Das ist die Nordreihe und die Ostspalte der Tabelle. Passt.
- **C:** vordere Ecke 1, Ränder $1, 3, 3, 4$ und $1, 2, 2, 4$. Das ist die Westspalte und die Nordreihe. Passt.
- A und C zeigen also dasselbe Stück aus zwei Richtungen. B hat vorne eine Ecke der Höhe 2, die es im gesuchten Stück nicht gibt; auch bei D passen die Ränder nicht.
- Lösung: **A** und **C**.