

Mathematik

90 Minuten · 16 Aufgaben · 40 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner (übliche Sekundarschulrechner)
- Zeichenutensilien erlaubt
- Keine Formelsammlung
- Lösungsweg muss vollständig ersichtlich sein

1 Bruchterme dividieren

2 Punkte

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{2a^2}{3b} : \frac{-4a}{9b^2}$$

Term: _____

2 Wurzelterme vereinfachen

3 Punkte

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 10b \cdot 2b}} + \frac{1}{\sqrt{(10b)^2 - 19b^2}}$$

Term: _____

3 Volumenverhältnis berechnen

2 Punkte

Berechnen Sie und geben Sie das Resultat auf 1 Dezimale genau an. (Der Term stellt ein Verhältnis von zwei Volumen dar)

$$\frac{0.630 \text{ m}^3}{45230 \text{ cm}^3}$$

Verhältnis: _____

4 Gleichung mit Brüchen

3 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

$$\frac{2(x+5)}{3} - \frac{3x-1}{5} = 4$$

x: _____

5 Fussballbildchen verschenken

3 Punkte

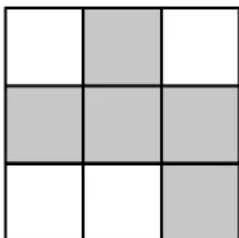
Anina und Sandro sammeln Fussballbildchen. Sandro hat 440 Bildchen mehr als Anina. Er schenkt ihr 60 seiner Bildchen. Jetzt hat Sandro noch immer 3-mal so viele Bildchen wie Anina. Berechnen Sie die Anzahl Bildchen, die Sandro vor dem Schenken hatte. Für die volle Punktzahl wird eine Gleichung verlangt.

6 Würfelkörper aus drei Ansichten

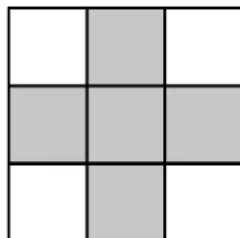
3 Punkte

Von einem Würfelkörper aus 7 gleich grossen Würfeln sind die drei Ansichten unten gegeben.

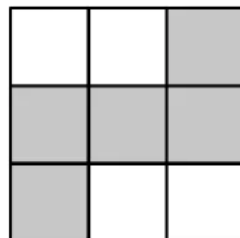
von vorne



von rechts



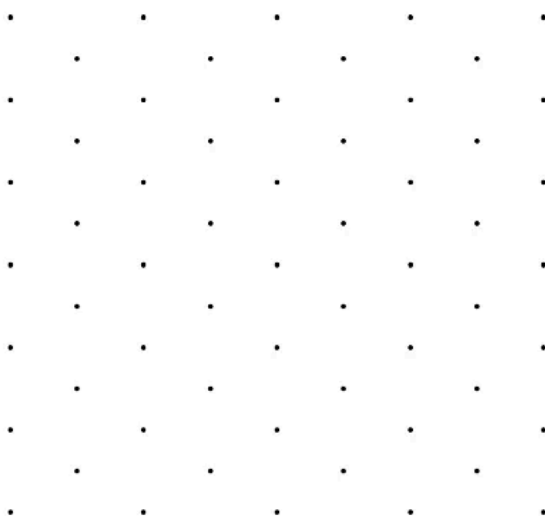
von oben



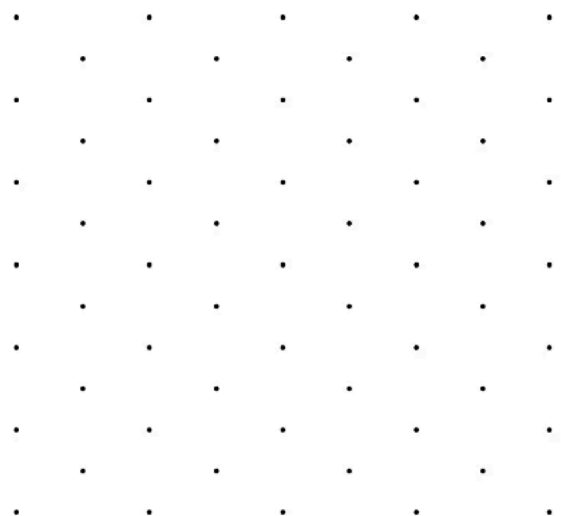
Zeichnen Sie das Raumbild des Würfelkörpers ins Punktepapier rechts. Zeichnen Sie nur sichtbare Kanten ein.

Das Punktepapier links können Sie für Ihre Skizzen verwenden.

Skizze



Lösung

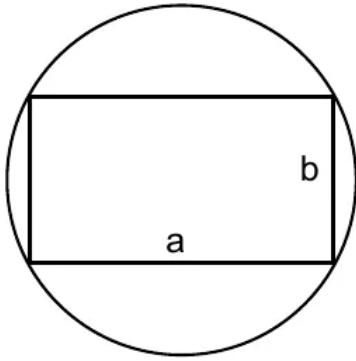


7 Rechteck im Kreis

2 Punkte

Einem Kreis ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 36$ cm und $b = 15$ cm einbeschrieben. Geben Sie den Flächeninhalt des Rechtecks in Prozent der Kreisfläche an.

Genauigkeit: 1 Dezimale



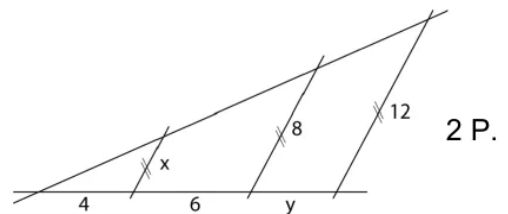
Anteil: _____ %

8 Strahlensatz: x und y

2 Punkte

Berechnen Sie x und y auf eine Dezimale genau.

8. Berechnen Sie x und y auf eine Dezimale genau.



x: _____

y: _____

9 Stimmzettel einer Abstimmung

3 Punkte

Bei einer Abstimmung haben $\frac{3}{5}$ aller Teilnehmenden ein «Ja» und $\frac{1}{3}$ ein «Nein» in die Urne gelegt. Die restlichen 24 Stimmzettel wurden leer eingeworfen. Berechnen Sie die Anzahl der Teilnehmenden an der Abstimmung. Für die volle Punktzahl wird eine Gleichung verlangt.

Teilnehmende: _____ Personen

10 Steigung am Piz Mitgel

2 Punkte

Die Karte ist nicht massstäblich abgedruckt. Es gelten die in der Karte eingetragenen Angaben.

- a) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung der direkten Strecke von Savognin (1207 m. ü. M.) bis zum Piz Mitgel (3159 m. ü. M.). Geben Sie Ihr Resultat auf 1% genau an. (Die Höhenangaben beziehen sich auf die in der Karte eingekreisten Kreuzchen.)

Steigung: _____ %

- b) Die durchschnittliche Steigung der direkten Strecke vom Piz Mitgel bis Chur (595 m. ü. M.) beträgt ca. 9.35%. Berechnen Sie die horizontale Distanz von Chur bis zum Piz Mitgel. Geben Sie Ihr Resultat auf 100 m genau an.

Horizontale Distanz: _____ km

11 Kugeln aus einer Urne

3 Punkte

In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 blaue Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent für das jeweilige zufällige Ereignis.

- a) Es wird einmal gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel blau ist?

P(blau): _____ %

- b) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel blau ist und die zweite schwarz?

P(blau, schwarz): _____ %

- c) Es wird zweimal **ohne** Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot ist und die zweite schwarz?

Genauigkeit: 1 Dezimale

P(rot, schwarz): _____ %

12 Lohnerhöhung und Pensumsreduktion

2 Punkte

Wegen guter Leistung erhält ein Angestellter eine Lohnerhöhung von 2.4%. Im darauf folgenden Jahr reduziert er sein Arbeitspensum um 20%. Nun erhält er monatlich einen Lohn

von 4505.60 Franken. Berechnen Sie den ursprünglichen Monatslohn, den der Angestellte vor seiner Lohnerhöhung und der Pensumsreduktion erhalten hat.

Ursprünglicher Monatslohn: _____ Fr.

13 Taxitarife vergleichen

4 Punkte

Jeannine vergleicht die Tarife von zwei Taxiunternehmen:

	Grundtarif in CHF	Kilometertarif in CHF
Taxi A	5	4
Taxi B	7	3

a) Stellen Sie die Tarife im vorgegebenen Diagramm grafisch dar.

- b) Bestimmen Sie grafisch, ab welcher Distanz Taxi B günstiger ist als Taxi A.

Distanz: _____ km

- c) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für den Tarif von Taxi A auf. Stellen Sie diese in der Form $y = \dots$ dar.

Taxi A: _____

- d) Taxiunternehmen C verlangt keinen Grundtarif und der Kilometertarif beträgt 6 Franken. Bestimmen Sie mit einer Gleichung, bei welcher Distanz bei Taxi A und Taxi C gleich viel bezahlt werden muss.

Distanz: _____ km

14 Pyramide und Zylinder

2 Punkte

Von der abgebildeten Pyramide ABCDS ist Folgendes gegeben:

- Die Grundfläche ist quadratisch.
- Die Grundkante AB misst 15 cm.
- Die Höhe h_1 misst 18 cm.

Berechnen Sie die Höhe h_2 eines Kreis-Zylinders, dessen Durchmesser $d = 10$ cm misst und der das gleiche Volumen wie die Pyramide besitzt.

Genauigkeit: 1 Dezimale

h_2 : _____ cm

15 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

Bestimmen Sie α und β .

α : _____ °

β : _____ °

16 Quadrat vergrössern

2 Punkte

Die Seiten eines Quadrates werden um je 8 cm verlängert, wodurch ein neues Quadrat entsteht, dessen Flächeninhalt um 240 cm^2 grösser ist. Berechnen Sie die Seitenlänge des

ursprünglichen Quadrates. Für die volle Punktzahl wird eine Gleichung verlangt.

Seitenlänge: _____ cm

Lösungen

BMS-Aufnahmeprüfung 2016 Mathematik BM1. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Bruchterme dividieren

2 Punkte

Ergebnis: $-\frac{3ab}{2}$

- Durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren:

$$\frac{2a^2}{3b} : \frac{-4a}{9b^2} = \frac{2a^2 \cdot 9b^2}{3b \cdot (-4a)}$$

- Kürzen: $2 \cdot 9 = 18$ und $3 \cdot 4 = 12$, also $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$; $\frac{a^2}{a} = a$; $\frac{b^2}{b} = b$.
- Das Minus bleibt vor dem Bruch:

$$= -\frac{3ab}{2}$$

2 Wurzelterme vereinfachen

3 Punkte

Ergebnis: $\frac{14}{45b}$

- Zuerst unter den Wurzeln zusammenfassen: $5b^2 + 10b \cdot 2b = 5b^2 + 20b^2 = 25b^2$ und $(10b)^2 - 19b^2 = 100b^2 - 19b^2 = 81b^2$.
- Wurzel ziehen: $\sqrt{25b^2} = 5b$, $\sqrt{81b^2} = 9b$.

$$\frac{1}{5b} + \frac{1}{9b}$$

- Gemeinsamer Nenner $45b$:

$$\frac{9}{45b} + \frac{5}{45b} = \frac{14}{45b}$$

3 Volumenverhältnis berechnen

2 Punkte

Ergebnis: ≈ 13.9 (ohne Einheit)

- Zähler und Nenner in dieselbe Einheit bringen, z. B. dm^3 : $0.630 \text{ m}^3 = 630 \text{ dm}^3$ und $45230 \text{ cm}^3 = 45.23 \text{ dm}^3$.

$$\frac{630 \text{ dm}^3}{45.23 \text{ dm}^3} \approx 13.9$$

- Die Einheiten kürzen sich weg: Ein Verhältnis hat keine Einheit.
-

4 Gleichung mit Brüchen

3 Punkte

Ergebnis: $x = 7$

- Linke Seite auf den gemeinsamen Nenner 15 bringen:

$$\frac{10(x + 5) - 3(3x - 1)}{15} = 4$$

- Mit 15 multiplizieren und Klammern auflösen (Achtung: $-3 \cdot (-1) = +3$):

$$10x + 50 - 9x + 3 = 60$$

- Zusammenfassen: $x + 53 = 60$, also $x = 7$.
-

5 Fussballbildchen verschenken

3 Punkte

Ergebnis: Sandro hatte zu Beginn 540 Bildchen.

- Sandro hat am Anfang x Bildchen, Anina $x - 440$.
- Nach dem Schenken: Sandro $x - 60$, Anina $x - 440 + 60 = x - 380$.
- Sandro hat jetzt 3-mal so viele wie Anina:

$$3(x - 380) = x - 60$$

$$3x - 1140 = x - 60 \Rightarrow 2x = 1080 \Rightarrow x = 540$$

- Sandro hatte zu Beginn 540 Bildchen.
- (Andere Wahl: Anina hat x , dann gilt $3(x + 60) = x + 380$, also $x = 100$ und Sandro $100 + 440 = 540$.)

6 Würfelkörper aus drei Ansichten

3 Punkte

Ergebnis: Raumbild siehe Lösungsgrafik.

- Aus den Ansichten den Körper Schicht für Schicht aufbauen.
- **Mittlere Schicht (5 Würfel):** Die Ansicht von oben zeigt die Form: eine Reihe aus 3 Würfeln von links nach rechts, dazu vorne links und hinten rechts je ein Würfel. Von vorne und von rechts ist diese Schicht als volle Reihe aus 3 Würfeln zu sehen.
- **Oben (1 Würfel):** auf dem mittleren Würfel der Reihe (von vorne und von rechts jeweils in der Mitte oben).
- **Unten (1 Würfel):** unter dem rechten Würfel der mittleren Reihe (von vorne unten rechts, von rechts unten in der Mitte).
- Zusammen $5 + 1 + 1 = 7$ Würfel. Diesen Körper ins Punktepapier zeichnen, nur die sichtbaren Kanten.

7 Rechteck im Kreis

2 Punkte

Ergebnis: $\approx 45.2\%$

- Die Diagonale des Rechtecks ist der Kreisdurchmesser (Pythagoras):

$$d = \sqrt{36^2 + 15^2} \text{ cm} = \sqrt{1521} \text{ cm} = 39 \text{ cm}, \quad r = 19.5 \text{ cm}$$

- Kreisfläche: $A_{Kr} = r^2 \pi = 19.5^2 \pi \text{ cm}^2 \approx 1194.59 \text{ cm}^2$
- Rechteckfläche: $36 \cdot 15 = 540 \text{ cm}^2$

- Anteil: $\frac{540}{1194.59} \approx 0.452 = 45.2\%$

8 Strahlensatz: x und y

2 Punkte

Ergebnis: $x = 3.2, y = 5.0$

- Die Strecken x, 8 und 12 sind parallel (Strahlensatz). Vom Scheitel aus misst man auf der unteren Geraden 4, dann $4 + 6 = 10$, dann $10 + y$.
- x: $\frac{x}{4} = \frac{8}{10} \Rightarrow x = 3.2$
- y: $\frac{y+10}{12} = \frac{10}{8} \Rightarrow y + 10 = \frac{120}{8} = 15 \Rightarrow y = 5.0$

9 Stimmzettel einer Abstimmung

3 Punkte

Ergebnis: Es haben 360 Personen teilgenommen.

- Anzahl Teilnehmende = x .
- Ja + Nein + leer = alle:

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}x + 24 = x$$

- $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$, also bleibt $\frac{1}{15}x = 24$.
- $x = 24 \cdot 15 = 360$

10 Steigung am Piz Mitgel

2 Punkte

a) **Ergebnis:** $\approx 46\%$

- Horizontale Distanz aus der Karte: 8.4 cm, und 2 cm entsprechen 1 km, also $\frac{8.4}{2} \text{ km} = 4.2 \text{ km} = 4200 \text{ m}$.
- Höhenunterschied: $3159 \text{ m} - 1207 \text{ m} = 1952 \text{ m}$.
- Steigung = Höhenunterschied : horizontale Distanz:

$$\frac{1952}{4200} \cdot 100\% \approx 46\%$$

b) **Ergebnis:** $\approx 27.4 \text{ km (27 400 m)}$

- Höhenunterschied: $3159 \text{ m} - 595 \text{ m} = 2564 \text{ m}$.
- Steigung = Höhenunterschied : horizontale Distanz, also horizontale Distanz = Höhenunterschied : Steigung:

$$\frac{2564 \text{ m}}{0.0935} \approx 27\,422 \text{ m} \approx 27.4 \text{ km}$$

- Hinweis: Das offizielle Lösungsblatt nennt hier 28.4 km. Mit demselben Rechenweg ergibt sich aber $2564 : 0.0935 \approx 27\,422$, also 27.4 km; die 28.4 km sind ein Rechenfehler.

11 Kugeln aus einer Urne

3 Punkte

a) **Ergebnis: 20%**

- Insgesamt $3 + 5 + 2 = 10$ Kugeln, davon 2 blau.

$$P(b) = \frac{2}{10} = 20\%$$

b) **Ergebnis: 10%**

- Mit Zurücklegen sind beim zweiten Zug wieder alle 10 Kugeln in der Urne, 5 davon schwarz.
- Die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multiplizieren:

$$P(b, s) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 = 10\%$$

c) **Ergebnis: $\approx 16.7\%$**

- Erster Zug: 3 rote von 10 Kugeln.
- Ohne Zurücklegen sind danach nur noch 9 Kugeln in der Urne, davon 5 schwarz.

$$P(r, s) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$$

12 Lohnerhöhung und Pensumsreduktion

2 Punkte

Ergebnis: 5500 Franken

- Rückwärts rechnen. Pensum um 20% reduziert heisst: Er arbeitet noch 80%, der Lohn ist das 0.8-Fache.
- Lohn mit Erhöhung bei 100%: $L_2 = \frac{4505.60}{0.8} = 5632 \text{ Fr.}$
- Erhöhung um 2.4% heisst Faktor 1.024. Lohn vor der Erhöhung:

$$L_1 = \frac{5632}{1.024} = 5500 \text{ Fr.}$$

- Kontrolle: $5500 \cdot 1.024 \cdot 0.8 = 4505.60 \text{ Fr.}$

13 Taxitarife vergleichen

4 Punkte

a) Ergebnis: Zwei Geraden, siehe Lösungsgrafik.

- Taxi A: Gerade durch $(0 \mid 5)$, pro km steigt sie um 4 CHF, z. B. durch $(1 \mid 9)$ und $(3 \mid 17)$.
- Taxi B: Gerade durch $(0 \mid 7)$, pro km steigt sie um 3 CHF, z. B. durch $(1 \mid 10)$ und $(4 \mid 19)$.

b) Ergebnis: Ab 2 km ist Taxi B günstiger.

- Die beiden Geraden schneiden sich bei $(2 \mid 13)$: Bei 2 km kosten beide 13 CHF.
- Rechts davon liegt die Gerade von Taxi B unter der von Taxi A. Also ist Taxi B ab 2 km günstiger.

c) **Ergebnis:** $y = 4x + 5$

- Der Kilometertarif ist die Steigung (4), der Grundtarif der y-Achsenabschnitt (5).

$$y = 4x + 5$$

d) **Ergebnis:** Bei 2.5 km sind beide Taxis gleich teuer.

- Taxi C: $y = 6x$.
- Gleich teuer, wenn beide Terme gleich sind:

$$6x = 4x + 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 2.5$$

- Bei einer Fahrstrecke von 2.5 km sind beide Taxis gleich teuer.

14 Pyramide und Zylinder

2 Punkte

Ergebnis: $h_2 \approx 17.2 \text{ cm}$

- Volumen der Pyramide: Grundfläche mal Höhe durch 3:

$$V = \frac{15^2 \cdot 18}{3} \text{ cm}^3 = 1350 \text{ cm}^3$$

- Volumen des Zylinders: $V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h_2$. Nach h_2 auflösen:

$$h_2 = \frac{4V}{d^2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 1350 \text{ cm}^3}{10^2 \cdot \pi \text{ cm}^2} \approx 17.2 \text{ cm}$$

15 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

Ergebnis: $\alpha = 42.5^\circ, \beta = 32.5^\circ$

- M ist der Mittelpunkt des Halbkreises, also $MQ = MB$ (beides Radien). Das Dreieck MBQ ist gleichschenkelig, darum hat es bei Q und bei B je den Winkel α .
- Der Winkel bei M im Dreieck MBQ ist $80^\circ + 15^\circ = 95^\circ$ (Aussenwinkel des kleinen Dreiecks mit dem 15° -Winkel bei A). Winkelsumme:

$$2\alpha + 80^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 42.5^\circ$$

- P liegt auf dem Halbkreis über AB, also ist der Winkel bei P im Dreieck ABP 90° (Thales).
Bei B liegen dort $\beta + \alpha$:

$$\beta + 42.5^\circ + 15^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta = 32.5^\circ$$

16 Quadrat vergrössern

2 Punkte

Ergebnis: Die Seitenlänge misst 11 cm.

- Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates = x cm.
- Neue Fläche = alte Fläche + 240:

$$(x + 8)^2 = x^2 + 240$$

- Binomische Formel: $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 240$
- x^2 fällt weg: $16x = 176$, also $x = 11$.