

Mathematik

90 Minuten · 14 Aufgaben · 40 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner (kein CAS, kein Grafikrechner)
- Zeichenutensilien erlaubt
- Keine Formelsammlung
- Lösungsweg wird mitbewertet

1 Terme vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a)

$$\frac{2x}{9} + \frac{8x}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{x}{18}$$

Term: _____

b)

$$\frac{\sqrt{45x^2 - (3x)^2}}{\sqrt{4x^2}}$$

Term: _____

2 Bruchterme addieren

3 Punkte

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} + \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

Term: _____

3 Volumeneinheiten umrechnen

2 Punkte

Kreuzen Sie die **zwei** Grössen an, die einem Volumen von 300 cm³ entsprechen.

Hinweis: Sie dürfen auch nur eine Grösse ankreuzen; in diesem Fall erhalten Sie maximal 1 P.

Der Lösungsweg wird bei dieser Aufgabe nicht bewertet.

- 3'000 mm³

- 30 dm³
- 0.0003 m³
- 3'000 cl
- 3 dl
- 30 l

3'000 mm³ (ja / nein): _____

30 dm³ (ja / nein): _____

0.0003 m³ (ja / nein): _____

3'000 cl (ja / nein): _____

3 dl (ja / nein): _____

30 l (ja / nein): _____

4 Bruchgleichung lösen

3 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

$$\frac{x-3}{4} - \frac{2x-1}{3} = \frac{5(x+2)}{6}$$

x: _____

5 Kontostände mit Gleichung

2 Punkte

Danyal hat auf seinem Konto CHF 170.– mehr als Valerio. Valerio zahlt CHF 220.– auf sein Konto ein und Danyal hebt CHF 450.– von seinem Konto ab. Valerios Kontostand ist nun doppelt so hoch wie Danyals Kontostand. Berechnen Sie Valerios ursprünglichen Kontostand in CHF.

Für die volle Punktzahl wird eine Gleichung verlangt.

Valerios ursprünglicher Kontostand: _____ CHF

6 Fahrzeit und Geschwindigkeit

Nina fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 80 km/h vom Ort A in den 60 km entfernten Ort B.

- a) Laurine fährt gleichzeitig in A los wie Nina. Sie fährt von A nach B mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h. Sie macht unterwegs eine Pause und trifft mit Nina in B ein. Berechnen Sie die Länge der Pause in Minuten.

Länge der Pause: _____ min

- b) Für den Rückweg benötigt Nina 48 Minuten. Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit in km/h.

Geschwindigkeit: _____ km/h

7 Zins und Zinssatz

- a) Einem Kapital wird nach 95 Tagen ein Zins von CHF 118.75 gutgeschrieben. Der Jahreszinssatz beträgt 2.25 %. Berechnen Sie, wie viel Geld in CHF zu Beginn angelegt wurde.

Anfangskapital: _____ CHF

- b) Ein zweites Kapital in der Höhe von CHF 15'000.– erzielt über eine Anlagedauer von 216 Tagen einen Zins von CHF 72.–. Berechnen Sie den Jahreszinssatz in Prozent.

Jahreszinssatz: _____ %

8 Kugeln ohne Zurücklegen

In einer Schachtel liegen vier grüne und fünf rote Kugeln. Sie ziehen nacheinander zwei Kugeln, ohne sie wieder zurückzulegen.

- a) Zeichnen Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbaum und tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei den Ästen ein.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zwei grüne Kugeln zu ziehen.

P(zwei grüne Kugeln): _____

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, eine grüne und eine rote Kugel zu ziehen, egal in welcher Reihenfolge.

P(eine grüne und eine rote Kugel): _____

9 Wertverlust zweier Fahrzeuge

Der Verkaufspreis für ein neues Fahrzeug A beträgt CHF 52'500.–. Jedes Jahr sinkt der Wert des Fahrzeuges A um CHF 7'500.–. Ein Fahrzeug B hat nach vier Jahren noch einen Wert von CHF 25'000.– und nach acht Jahren einen Wert von CHF 5'000.–.

- a) Zeichnen Sie die beiden dazugehörigen Graphen ins Koordinatensystem.

- b) Bestimmen Sie den Wert in CHF von Fahrzeug A nach zwei Jahren.

Wert von Fahrzeug A: _____ CHF

- c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für den Wert von Fahrzeug B. Stellen Sie diese in der Form $y = \dots$ dar.

$y =$: _____

- d) Nach wie vielen Jahren sind die Fahrzeuge gleich viel wert?

Anzahl Jahre: _____ Jahre

10 Spirale auf einer Säule

2 Punkte

Eine Säule hat einen Durchmesser von 120 cm und eine Höhe von 200 cm. Auf die Säule wird ein Plakat mit den rechts eingezeichneten Linien aufgeklebt. Es entsteht so eine Spirale mit zwei Windungen. Berechnen Sie die Steigung der Spirale. Geben Sie Ihr Resultat auf 0.1 % genau an.

Steigung: _____ %

11 Würfel und Würfelnetz

Der abgebildete Würfel wird so **auf** das Netz gestellt, dass die graue Fläche und der Punkt A sich decken. Anschliessend wird der Würfel zum abgebildeten Netz aufgefaltet.

a) Zeichnen Sie den Punkt P im Würfelnetz ein.

b) Zeichnen Sie die Strecke QR im Würfel ein.

c) In der vorderen Fläche des Würfels ist ein F eingezeichnet. Zeichnen Sie dieses F im Netz in seiner korrekten Lage ein.

12 Halbkreis und Dreieck

3 Punkte

Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche. Genauigkeit: 1 Dezimale.

Inhalt der grauen Fläche: _____ cm^2

13 Wasser umfüllen

Ein quaderförmiges Gefäss hat eine quadratische Grundfläche mit 4 cm Kantenlänge. Das Gefäss ist 12 cm hoch mit Wasser gefüllt.

- a) Das Wasser wird in einen zweiten Quader mit quadratischer Grundfläche mit 5 cm Kantenlänge umgefüllt. Berechnen Sie die Füllhöhe des zweiten Quaders. Genauigkeit: 1 Dezimale.

Füllhöhe: _____ cm

- b) Das Wasser wird nun in das unten links abgebildete Gefäss umgefüllt. Die Grafiken rechts zeigen die Abhängigkeit zwischen Inhalt I und Füllhöhe h . Kreuzen Sie die Grafik an, welche den Sachverhalt korrekt darstellt.

14 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

In der Grafik bezeichnen M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreisbogen. Der Winkel α misst 20° . Berechnen Sie die Winkel β und γ . Die Abbildung ist nicht massstabgetreu.

β : _____ °

γ : _____ °

Lösungen

BMS-Aufnahmeprüfung 2018 Mathematik BM1. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen

a) Ergebnis: $\frac{11x}{18}$

- Punkt vor Strich: $\frac{8x}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8x}{18}$.
- Alles auf den Nenner 18 bringen: $\frac{2x}{9} = \frac{4x}{18}$.
- $\frac{4x}{18} + \frac{8x}{18} - \frac{x}{18} = \frac{4x+8x-x}{18} = \frac{11x}{18}$

b) Ergebnis: 3

- Zuerst unter der Wurzel im Zähler rechnen: $(3x)^2 = 9x^2$, also $45x^2 - 9x^2 = 36x^2$.
- $\sqrt{36x^2} = 6x$ und $\sqrt{4x^2} = 2x$.
- $\frac{6x}{2x} = 3$

2 Bruchterme addieren

3 Punkte

Ergebnis: $2x + 5$

- Zähler faktorisieren: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ (binomische Formel) und $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$, denn $-5 \cdot 2 = -10$ und $-5 + 2 = -3$.
- Kürzen: $\frac{(x+3)^2}{x+3} = x + 3$ und $\frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = x + 2$.
- Addieren: $x + 3 + x + 2 = 2x + 5$

3 Volumeneinheiten umrechnen

2 Punkte

Ergebnis: Nr. 3 (0.0003 m³) und Nr. 5 (3 dl)

Alles in cm³ umrechnen ($1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$, $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$, $1 \text{ m}^3 = 1'000'000 \text{ cm}^3$):

- $3'000 \text{ mm}^3 = 3 \text{ cm}^3$
- $30 \text{ dm}^3 = 30'000 \text{ cm}^3$
- $0.0003 \text{ m}^3 = 300 \text{ cm}^3 \checkmark$
- $3'000 \text{ cl} = 30 \text{ l} = 30'000 \text{ cm}^3$
- $3 \text{ dl} = 0.3 \text{ l} = 300 \text{ cm}^3 \checkmark$
- $30 \text{ l} = 30'000 \text{ cm}^3$

4 Bruchgleichung lösen

3 Punkte

Ergebnis: $x = -\frac{5}{3} = -1.\overline{6}$

- Gemeinsamer Nenner 12: $\frac{3x-9}{12} - \frac{8x-4}{12} = \frac{10x+20}{12}$
- Mit 12 multiplizieren. Achtung: Das Minus vor dem Bruch wirkt auf den ganzen Zähler:
 $3x - 9 - 8x + 4 = 10x + 20$
- Zusammenfassen: $-5x - 5 = 10x + 20$, also $-15x = 25$
- $x = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3} = -1.\overline{6}$

5 Kontostände mit Gleichung

2 Punkte

Ergebnis: CHF 780.–

- x : Valerios ursprünglicher Kontostand in CHF. Danyal hat dann $x + 170$.
- Nachher: Valerio $x + 220$, Danyal $x + 170 - 450$.
- Valerio hat doppelt so viel wie Danyal: $2(x + 170 - 450) = x + 220$
- $2x - 560 = x + 220 \Rightarrow x = 780$
- Valerios ursprünglicher Kontostand beträgt CHF 780.–.

6 Fahrzeit und Geschwindigkeit

a) Ergebnis: 9 min

- Fahrzeit von Nina: $\frac{60}{80} \text{ h} = 0.75 \text{ h}$
- Reine Fahrzeit von Laurine: $\frac{60}{100} \text{ h} = 0.6 \text{ h}$
- Beide kommen gleichzeitig an, also dauert die Pause $0.75 \text{ h} - 0.6 \text{ h} = 0.15 \text{ h} = 0.15 \cdot 60 \text{ min} = 9 \text{ min}$.

b) Ergebnis: 75 km/h

- 48 min in Stunden: $\frac{48}{60} \text{ h} = 0.8 \text{ h}$
- $v = \frac{60 \text{ km}}{0.8 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$

7 Zins und Zinssatz

a) Ergebnis: CHF 20'000.–

Im Zinsrechnen hat ein Jahr 360 Tage.

- Jahreszins: 95 Tage $\triangleq$ CHF 118.75, also 360 Tage $\triangleq \frac{118.75}{95} \cdot 360 = \text{CHF } 450.–$
- CHF 450.– $\triangleq$ 2.25 %, also 100 % $\triangleq \frac{450}{2.25} \cdot 100 = \text{CHF } 20'000.–$

Oder mit Gleichung: $118.75 = \frac{K_0 \cdot 2.25 \cdot 95}{360 \cdot 100}$ ergibt $K_0 = \text{CHF } 20'000.–$.

b) Ergebnis: 0.8 %

- Jahreszins: 216 Tage $\triangleq$ CHF 72.–, also 360 Tage $\triangleq \frac{72}{216} \cdot 360 = \text{CHF } 120.–$
- CHF 15'000.– $\triangleq$ 100 %, also CHF 120.– $\triangleq \frac{120}{15'000} \cdot 100 \% = 0.8 \%$

Oder mit Gleichung: $72 = \frac{15'000 \cdot p \cdot 216}{360 \cdot 100}$ ergibt $p = 0.8 \%$.

8 Kugeln ohne Zurücklegen

a) Ergebnis: Baum mit 1. Zug: $g \frac{4}{9}, r \frac{5}{9}$; 2. Zug nach g : $g \frac{3}{8}, r \frac{5}{8}$; nach r : $g \frac{4}{8}, r \frac{4}{8}$

- 1. Zug: 9 Kugeln, davon 4 grün und 5 rot: $P(g) = \frac{4}{9}, P(r) = \frac{5}{9}$.
- 2. Zug: Es liegen nur noch 8 Kugeln in der Schachtel.
 - Nach grün (noch 3 grüne, 5 rote): $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$.
 - Nach rot (noch 4 grüne, 4 rote): $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ und $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- Die Wahrscheinlichkeiten der vier Pfade ($\frac{12}{72}, \frac{20}{72}, \frac{20}{72}, \frac{20}{72}$) sind zur Kontrolle unter dem Baum notiert.

b) **Ergebnis:** $\frac{1}{6} \approx 16.7\%$

Pfad g–g im Baum, Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multiplizieren:

$$P = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$$

c) **Ergebnis:** $\frac{5}{9} \approx 55.6\%$

Zwei Pfade passen: g–r und r–g. Pfade multiplizieren, dann addieren:

$$P = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9} \approx 55.6\%$$

9 Wertverlust zweier Fahrzeuge

a) **Ergebnis: A: Gerade durch (0 | 52'500) und (7 | 0); B: Gerade durch (4 | 25'000) und (8 | 5'000), beginnt bei (0 | 45'000)**

- Fahrzeug A: Start bei (0 | 52'500), pro Jahr 7'500 weniger: (1 | 45'000), (2 | 37'500), (3 | 30'000), ... bis (7 | 0). Punkte mit einer Geraden verbinden.
- Fahrzeug B: Die Punkte (4 | 25'000) und (8 | 5'000) einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen. Sie schneidet die y-Achse bei 45'000 und die x-Achse bei 9.

b) **Ergebnis: CHF 37'500.–**

Aus der Grafik ablesen oder rechnen: $52'500 - 2 \cdot 7'500 = 37'500$. Der Wert von Fahrzeug A beträgt nach zwei Jahren CHF 37'500.–.

c) **Ergebnis: $y = 45'000 - 5'000x$**

- Steigung: In 4 Jahren (von Jahr 4 bis 8) sinkt der Wert um $25'000 - 5'000 = 20'000$, also $m = \frac{-20'000}{4} = -5'000$ pro Jahr.
- Startwert: $25'000 + 4 \cdot 5'000 = 45'000$
- $y = 45'000 - 5'000x$

d) **Ergebnis: Nach 3 Jahren**

Schnittpunkt der beiden Geraden aus der Grafik ablesen oder die Werte gleichsetzen:

$$52'500 - 7'500x = 45'000 - 5'000x$$

$$7'500 = 2'500x \Rightarrow x = 3$$

Nach 3 Jahren haben die Fahrzeuge den gleichen Wert (je CHF 30'000.–).

10 Spirale auf einer Säule

2 Punkte

Ergebnis: $\approx 26.5\%$

- Das Plakat ist so lang wie der Umfang der Säule: $u = d \cdot \pi = 120 \cdot \pi \text{ cm} \approx 376.99 \text{ cm}$.
- Auf dem Plakat steigt jede Linie über die ganze Länge um die halbe Höhe (zwei Windungen): $200 \text{ cm} : 2 = 100 \text{ cm}$.
- Steigung = $\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{horizontale Strecke}} = \frac{100}{120 \cdot \pi} \approx 0.265 = 26.5\%$

11 Würfel und Würfelnetz

- a) **Ergebnis: P liegt im Netz an der Ecke, wo drei Quadrate zusammenstossen: rechte obere Ecke des Quadrats, das direkt über dem Quadrat rechts vom grauen Quadrat liegt.**

Die graue Fläche liegt im Netz auf dem grauen Quadrat, A auf seiner markierten Ecke. Falten Sie den Würfel in Gedanken Fläche um Fläche ab und verfolgen Sie die Ecken: Die Kante von A nach P ist eine Kante der oberen Würfel­fläche. P landet an der rechten oberen Ecke des Quadrats über dem Quadrat rechts vom grauen Quadrat, wo drei Quadrate zusammenstossen (siehe Lösungsgrafik).

- b) **Ergebnis: QR ist im Würfel die obere Kante der vorderen Fläche (von der vorderen oberen linken zur vorderen oberen rechten Ecke).**

Die Strecke QR ist im Netz die gemeinsame Kante der beiden obersten Quadrate. Faltet man das Netz wieder zum Würfel, wird daraus die obere Kante der vorderen Würfel­fläche: Q ist die vordere obere Ecke auf der Seite der grauen Fläche, R die vordere obere Ecke rechts (siehe Lösungsgrafik).

- c) **Ergebnis: Das F liegt im Netz im Quadrat oben rechts, um 90° gedreht: der Stamm liegt waagrecht oben, die beiden Querbalken zeigen nach unten.**

Weil QR die obere Kante der vorderen Fläche ist, ist die vordere Würfel­fläche im Netz das Quadrat oben rechts (rechts von QR). Die Oberseite des F zeigt zu QR, also zur linken Seite dieses Quadrats. Das F erscheint deshalb um 90° gedreht: Der Stamm verläuft waagrecht oben, die beiden Querbalken zeigen nach unten (siehe Lösungsgrafik).

Halbkreis und Dreieck

Ergebnis: $\approx 33.8 \text{ cm}^2$

Die graue Fläche besteht aus einem kleinen Halbkreis und einem Dreieck.

- Halbkreis: Sein Durchmesser $\overline{M_1B}$ ist der Radius des grossen Halbkreises, also $10 \text{ cm} : 2 = 5 \text{ cm}$, und damit $r = 2.5 \text{ cm}$. $A_{\text{Halbkreis}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2.5^2}{2} \approx 9.82 \text{ cm}^2$
- Dreieck: Die Ecke liegt auf dem grossen Halbkreis über $\overline{AB}$, also ist das Dreieck rechtwinklig (Thaleskreis). Zweite Kathete: $\sqrt{10^2 - 8^2} \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. $A_{\text{Dreieck}} = \frac{8 \cdot 6}{2} \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$
- $A_{\text{graue Fläche}} \approx 9.82 + 24 \approx 33.8 \text{ cm}^2$

13 Wasser umfüllen

a) **Ergebnis:** $\approx 7.7 \text{ cm}$

- Wasservolumen: $V_{\text{Wasser}} = G_1 \cdot h_1 = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 192 \text{ cm}^3$
- Das Volumen bleibt gleich, nur die Grundfläche ändert: $h_2 = \frac{V_{\text{Wasser}}}{G_2} = \frac{192}{5 \cdot 5} \text{ cm} = 7.68 \text{ cm} \approx 7.7 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** Die mittlere Grafik in der ersten Zeile

- Unten ist das Gefäss breit und wird nach oben immer schmaler: Pro Liter steigt das Wasser zuerst langsam, dann immer schneller. Der Graph beginnt flach und wird immer steiler.
- Im oberen Teil ist das Gefäss ein schmales Rohr mit gleichbleibender Breite: Die Höhe wächst gleichmässig und schnell, der Graph ist dort eine steile Gerade.
- Genau so sieht die mittlere Grafik in der ersten Zeile aus.

14 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

Ergebnis: $\beta = 40^\circ, \gamma = 30^\circ$

Bezeichnungen: A und B sind die Endpunkte des Durchmessers (links, rechts), C ist die obere Ecke des grossen Dreiecks, P der Schnittpunkt von $\overline{AM_2}$ mit $\overline{BC}$, Q der Schnittpunkt von $\overline{M_1M_2}$ mit $\overline{BC}$.

- Thaleskreis: Der Winkel bei C ist 90° , also $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.
- Im Dreieck APC: Winkel bei P = $180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$. Der Scheitelwinkel $\angle M_2PQ$ misst also auch 70° .
- Der kleine Bogen um M_2 zeigt $\overline{M_2P} = \overline{M_2Q}$: Das Dreieck M_2PQ ist gleichschenkelig, die Winkel bei P und Q sind je 70° , also ist der Winkel bei M_2 : $180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.
- Dreieck AM_1M_2 ist gleichschenkelig ($\overline{M_1A} = \overline{M_1M_2} = \text{Radius}$), also $\beta = \angle AM_2M_1 = 40^\circ$.
- $\gamma = 90^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 30^\circ$