Mathematik

90 Minuten · 14 Aufgaben · 40 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (kein CAS, nicht grafikfähig)
- Zeichenutensilien erlaubt
- Keine Formelsammlung
- Lösungsweg muss vollständig ersichtlich sein

---

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{25-16}}{\sqrt{(10x)^2+21x^2}}$$

Term: _____

b) Schreiben Sie ohne Klammern und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$4(x-1)^2$$

Term: _____

c) Schreiben Sie ohne Klammern und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$5a+2b-(3a+b-(-2a+b))$$

Term: _____

2 Gleichungen lösen

4 Punkte

Berechnen Sie jeweils die Lösung der Gleichung.

a) $(x+2)(x-1) = x^2 + 5x - 14$

x: _____

b)

$$\frac{21x}{4} - \frac{18(4-x)}{8} = 6x$$

x: _____

3 Bruchterme vereinfachen

5 Punkte

a) Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$9b \cdot \frac{a^2}{3} + 8a^2 : \frac{2}{b}$$

Term: _____

b) Schreiben Sie als einen einzigen Bruch und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$7 - \frac{3x - 1}{5}$$

Term: _____

c) Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{3x - 15}{x^2 - 9x + 20} : \frac{2x + 1}{x - 4}$$

Term: _____

---

4 Durchschnittsgeschwindigkeit Rennrad

2 Punkte

Fiona fährt Rennrad. Ihre Trainingsstrecke misst 36 km. Die ersten 22 km der Strecke legt sie in 48 min zurück.

Am Schluss hat sie eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 24 km/h über die ganze Strecke.

Berechnen Sie, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit Fiona die verbleibenden 14 km der Strecke gefahren ist.

Geschwindigkeit: _____ km/h

5 Masseinheiten umrechnen

2 Punkte

a) Ein grosses Fass Salatsauce wird in 2'000 Flaschen wie folgt abgefüllt:

- 1'000 Flaschen à 5 dl
- 400 Flaschen à 150 ml
- 600 Fläschchen à 10 cl

Berechnen Sie, wie viele Kubikdezimeter (dm^3) Salatsauce ein Fass beinhaltet.

Inhalt: _____ dm^3

b) Ein Jasskarten-Set besteht aus 36 Karten. Eine Karte hat die Masse 89 mm x 57 mm.

Berechnen Sie, welche Fläche in Quadratmetern (m^2) alle Karten zusammen einnehmen.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Fläche: _____ m^2

6 Wertverlust und Zins

3 Punkte

a) Der Neupreis eines Autos beläuft sich auf CHF 35'000. Im ersten Jahr beträgt der Wertverlust 25 %, im zweiten Jahr 20 % und in den folgenden Jahren 15 %.

Berechnen Sie den gesamten Wertverlust nach 5 Jahren in Prozenten.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Wertverlust: _____ %

b) Frau Huber hat zu Beginn 2020 einen Betrag von CHF 18'000 auf ihrem Konto. Der Jahreszinssatz beträgt 0.2 %. Nach drei Monaten kauft sie ein neues Motorrad und hat daher nur noch CHF 10'000 auf ihrem Konto.

Berechnen Sie, welchen Betrag mit Zinsen Frau Huber Ende 2020 auf dem Konto hat.

Betrag: _____ CHF

---

7 Treppenstufen mit Gleichung

2 Punkte

Eine Treppe hat 22 Stufen. Hätte man die Stufenhöhe 1.6 cm grösser gewählt, wären zwei Stufen weniger nötig gewesen.

Berechnen Sie die Höhe einer Treppenstufe.

Für die volle Punktzahl wird eine Gleichung verlangt.

Stufenhöhe: _____ cm

---

8 Zwei Tetraederwürfel

3 Punkte

In einem Spiel wird mit zwei Tetraederwürfeln mit je den Zahlen 1 bis 4 gewürfelt.

Anschliessend werden die zwei gewürfelten Zahlen miteinander multipliziert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der beiden Zahlen grösser ist als 7.

Wahrscheinlichkeit: _____

b) Es wird mehrmals nacheinander mit beiden Tetraederwürfeln gewürfelt und jeweils das Produkt der beiden Zahlen bestimmt. 57-mal beträgt das Produkt 12.

Wurde eher 350-mal, 450-mal, 550-mal, 650-mal oder 750-mal gewürfelt?

Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

Anzahl Würfe (350-mal / 450-mal / 550-mal / 650-mal / 750-mal): _____

---

9 Benzinverbrauch dreier Autos

4 Punkte

Drei Autos A, B, und C fahren gleichzeitig in die gleiche Richtung los. Der Benzinverbrauch von Auto A ist in der Grafik eingezeichnet:

Das Auto B hat 54 Liter Benzin im Tank und verbraucht 9 Liter Benzin auf 100 km. Das Auto C hat 35 Liter Benzin im Tank und verbraucht 5 Liter Benzin auf 100 km.

a) Bestimmen Sie den Benzinverbrauch auf 100 km des Autos A.

Verbrauch: _____ Liter pro 100 km

b) Bestimmen Sie graphisch, nach wie vielen Kilometern die Autos B und C gleich viel Benzin im Tank haben. Nutzen Sie das Koordinatensystem auf Seite 10.

Distanz: _____ km

c) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für den Tankinhalt y des Autos A auf. Dabei bezeichnet x die Distanz in Kilometern.

y =: _____

10 Trapez und rechtwinkliges Dreieck

2 Punkte

Das rechtwinklige Dreieck CDE besitzt den halben Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

Berechnen Sie die Länge der Strecke x.

Die Skizze ist nicht massstabgetreu.

x: _____ cm

11 Steigung einer Gondelbahn

3 Punkte

Die Skizze zeigt die Beförderungssituation in einem kleinen Skigebiet.

Der untere Abschnitt von A nach B besteht aus einem Skilift mit einer durchschnittlichen Steigung von 18 %, der obere Abschnitt von B nach C aus einem Sessellift mit durchschnittlich 25 % Steigung.

Die beiden Anlagen sollen durch eine einzige Gondelbahn von A nach C ersetzt werden.

Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung dieser Gondelbahn.

Genauigkeit: 1 Dezimale. Die Skizze ist nicht massstabgetreu.

Steigung: _____ %

---

12 Netz eines Doppeltetraeders

2 Punkte

Der rechts abgebildete Körper besteht aus zwei Tetraedern.

Auf jede Fläche des Körpers wird ein Symbol gezeichnet, wie im Netz abgebildet.

Das unten abgebildete Netz gehört zum gleichen Körper.

Zeichnen Sie die Symbole korrekt ein.

13 Viertelzylinder

2 Punkte

Der graue Körper entspricht einem Viertel des Zylinders:

a) Die Höhe h beträgt 14 cm und der Radius 4 cm.

Berechnen Sie das Volumen des grauen Körpers.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Volumen: _____ cm^3

b) Der Radius r des Zylinders beträgt 5 cm. Das Volumen des grauen Körpers beträgt 300 cm^3.

Berechnen Sie die Höhe h des grauen Körpers.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

h: _____ cm

---

14 Würfel mit ausgeschnittenen Ecken

2 Punkte

Aus einem grossen Würfel wurden an allen Ecken kleine, gleich grosse Würfel herausgeschnitten.

Das Volumen des Restkörpers beträgt 12'096 cm^3.

Berechnen Sie x.

x: _____ cm

Lösungen

BMS-Aufnahmeprüfung 2021 Mathematik BM1. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{3}{11x}$

- Zähler: $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$
- Nenner: $(10x)^2 + 21x^2 = 100x^2 + 21x^2 = 121x^2$, also $\sqrt{121x^2} = 11x$
- Ergebnis: $\frac{3}{11x}$

Achtung: Die Wurzel aus einer Summe darf man nicht summandenweise ziehen. Erst ausrechnen, dann die Wurzel ziehen.

b) **Ergebnis:** $4x^2 - 8x + 4$

- Zuerst das Quadrat mit der 2. binomischen Formel auflösen: $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
- Dann mit 4 multiplizieren: $4(x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 8x + 4$

c) **Ergebnis:** $2b$

Klammern von innen nach aussen auflösen. Ein Minus vor der Klammer kehrt alle Vorzeichen in der Klammer um.

- Innere Klammer: $3a + b - (-2a + b) = 3a + b + 2a - b$
- Äussere Klammer: $5a + 2b - (3a + b + 2a - b) = 5a + 2b - 3a - b - 2a + b$
- Zusammenfassen: $(5a - 3a - 2a) + (2b - b + b) = 2b$

2 Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 3$

- Links ausmultiplizieren: $(x+2)(x-1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$
- Gleichung: $x^2 + x - 2 = x^2 + 5x - 14$
- x^2 fällt auf beiden Seiten weg: $x - 2 = 5x - 14$, also $12 = 4x$
- $x = 3$

b) **Ergebnis:** $x = 6$

Mit dem Hauptnenner 8 alle Brüche gleichnamig machen:

- $\frac{42x}{8} - \frac{72-18x}{8} = \frac{48x}{8}$
- Mit 8 multiplizieren. Achtung, das Minus vor dem Bruch wirkt auf den ganzen Zähler: $42x - 72 + 18x = 48x$
- $60x - 72 = 48x$, also $12x = 72$
- $x = 6$

Typischer Fehler: $42x - 72 - 18x$ (Vorzeichen nicht umgekehrt) führt auf das falsche Ergebnis $x = -3$.

---

3 Bruchterme vereinfachen

5 Punkte

a) **Ergebnis:** $7a^2b$

Punkt vor Strich: zuerst beide Produkte bzw. Quotienten ausrechnen.

- $9b \cdot \frac{a^2}{3} = 3a^2b$
- Durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren: $8a^2 : \frac{2}{b} = 8a^2 \cdot \frac{b}{2} = 4a^2b$
- Addieren: $3a^2b + 4a^2b = 7a^2b$

b) **Ergebnis:** $\frac{36-3x}{5}$

- 7 auf den Nenner 5 bringen: $7 = \frac{35}{5}$
- $\frac{35}{5} - \frac{3x-1}{5} = \frac{35-(3x-1)}{5} = \frac{35-3x+1}{5}$
- Ergebnis: $\frac{36-3x}{5}$

c) **Ergebnis:** $\frac{3}{2x+1}$

- Zähler faktorisieren: $3x - 15 = 3(x-5)$
- Nenner faktorisieren: $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$ (zwei Zahlen mit Produkt 20 und Summe -9: -4 und -5)
- Mit dem Kehrwert multiplizieren: $\frac{3(x-5)}{(x-4)(x-5)} \cdot \frac{x-4}{2x+1}$
- $(x-5)$ und $(x-4)$ kürzen: $\frac{3}{2x+1}$

---

4 Durchschnittsgeschwindigkeit Rennrad

2 Punkte

Ergebnis: 20 km/h

Die Durchschnittsgeschwindigkeit über die ganze Strecke legt die Gesamtzeit fest.

- Gesamtzeit: $t = \frac{36}{24}\,\mathrm{h} = 1.5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}$

- Zeit für den zweiten Teil: $90\,\text{min} - 48\,\text{min} = 42\,\text{min} = 0.7\,\text{h}$
- Geschwindigkeit für den zweiten Teil: $v = \frac{14}{0.7}\,\text{km/h} = 20\,\text{km/h}$

---

5 Masseinheiten umrechnen

2 Punkte

a) **Ergebnis: 620 dm³**

Alles in Liter umrechnen, denn $1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3$.

- $1'000 \cdot 5\,\text{dl} = 5'000\,\text{dl} = 500\,\text{l}$
- $400 \cdot 150\,\text{ml} = 60'000\,\text{ml} = 60\,\text{l}$
- $600 \cdot 10\,\text{cl} = 6'000\,\text{cl} = 60\,\text{l}$
- Total: $500 + 60 + 60 = 620\,\text{l} = 620\,\text{dm}^3$

b) **Ergebnis: 0.2 m²**

- Fläche aller Karten: $36 \cdot 89\,\text{mm} \cdot 57\,\text{mm} = 182'628\,\text{mm}^2$
- Umrechnen: $1\,\text{m}^2 = 1'000'000\,\text{mm}^2$, also $182'628\,\text{mm}^2 = 0.182628\,\text{m}^2$
- Auf 1 Dezimale gerundet: $0.2\,\text{m}^2$

---

6 Wertverlust und Zins

3 Punkte

a) **Ergebnis: 63.2 %**

Ein Verlust von 25 % heisst: Es bleiben 75 %, also Faktor 0.75. Die Prozente beziehen sich jedes Jahr auf den aktuellen Wert, deshalb werden die Faktoren multipliziert (nicht die Prozente addiert).

- Restwert nach 5 Jahren: $0.75 \cdot 0.8 \cdot 0.85^3 \approx 0.368$, also rund 36.8 % des Neupreises
- Wertverlust: $1 - 0.75 \cdot 0.8 \cdot 0.85^3 \approx 0.632 = 63.2\,\%$

Der Neupreis von CHF 35'000 wird dafür nicht gebraucht.

b) **Ergebnis: CHF 10'024**

Zins für jeden Zeitabschnitt einzeln berechnen (Marchzins: Jahreszins mal Anteil des Jahres).

- 3 Monate mit CHF 18'000: $\frac{3}{12} \cdot 18'000 \cdot \frac{0.2}{100} = 9$
- 9 Monate mit CHF 10'000: $\frac{9}{12} \cdot 10'000 \cdot \frac{0.2}{100} = 15$
- Kontostand Ende 2020: $9 + 15 + 10'000 = \text{CHF } 10'024$

7 Treppenstufen mit Gleichung

2 Punkte

Ergebnis: 16 cm

Die Gesamthöhe der Treppe bleibt in beiden Fällen gleich.

- x = Höhe einer Treppenstufe in cm
- Gleichung: $22x = 20(x + 1.6)$
- $22x = 20x + 32$, also $2x = 32$
- $x = 16$

Die Höhe einer Treppenstufe beträgt 16 cm.

8 Zwei Tetraederwürfel

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\,\%$

Alle Produkte in einer Tabelle aufschreiben (Würfel 1 / Würfel 2):

T1/T2	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

- Es gibt $4 \cdot 4 = 16$ gleich wahrscheinliche Ergebnisse.
- Grösser als 7 sind: 8, 8, 9, 12, 12, 16, also 6 Ergebnisse.
- $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\,\%$

b) **Ergebnis: Am ehesten 450-mal ($8 \cdot 57 = 456$)**

- Das Produkt 12 kommt gemäss Tabelle in 2 von 16 Fällen vor ($3 \cdot 4$ und $4 \cdot 3$), also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.
- Bei vielen Würfen gibt also etwa jeder achte Wurf das Produkt 12.
- Rechnung: $8 \cdot 57 = 456$
- Es wurde am ehesten 450-mal gewürfelt.

9 Benzinverbrauch dreier Autos

4 Punkte

a) **Ergebnis: 8 Liter pro 100 km**

- Aus der Grafik: Auto A startet mit 40 Litern und hat nach 500 km einen leeren Tank.
- Verbrauch: 40 Liter auf 500 km, also $\frac{40}{5} = 8$ Liter pro 100 km.

b) **Ergebnis: Nach 475 km (abgelesen, Genauigkeit ±5 km)**

- Gerade B einzeichnen: Start bei 54 Litern, pro 100 km 9 Liter weniger, also z. B. durch $(0 \mid 54)$ und $(600 \mid 0)$.
- Gerade C einzeichnen: Start bei 35 Litern, pro 100 km 5 Liter weniger, also durch $(0 \mid 35)$ und $(700 \mid 0)$.
- Schnittpunkt der beiden Geraden ablesen: bei etwa 475 km (Tankinhalt dort rund 11 Liter).

Kontrolle mit Rechnung: $54 - 0.09x = 35 - 0.05x$ ergibt $19 = 0.04x$, also $x = 475$.

c) **Ergebnis:** $y = 40 - 0.08x$

- Startwert (y-Achsenabschnitt): 40 Liter
- Verbrauch pro km: $8 : 100 = 0.08$ Liter, der Tankinhalt nimmt ab, also Steigung -0.08
- $y = 40 - 0.08x$

---

10 Trapez und rechtwinkliges Dreieck

2 Punkte

Ergebnis: x = 8 cm

- Trapezfläche: $\frac{\overline{CD}+15}{2} \cdot 6 = 72$, also $\overline{CD} + 15 = 24$ und $\overline{CD} = 9\,\text{cm}$
- Das Dreieck CDE hat die halbe Fläche: $72 : 2 = 36\,\text{cm}^2$
- Es ist rechtwinklig bei C, die Katheten sind $\overline{CD}$ und x: $\frac{x \cdot 9}{2} = 36$
- $x = 8\,\text{cm}$

---

11 Steigung einer Gondelbahn

3 Punkte

Ergebnis: 23.3 %

Steigung = Höhenunterschied : horizontale Distanz.

- Höhenunterschied von A nach B (x): $\frac{x}{900} = 0.18$, also $x = 162\,\text{m}$
- Horizontale Distanz von B nach C (y): $\frac{700}{y} = 0.25$, also $y = 2'800\,\text{m}$
- Steigung von A nach C: $\frac{x+700}{900+y} = \frac{862}{3'700} \approx 0.233 = 23.3\,\%$

Die beiden Prozentwerte darf man nicht einfach mitteln, weil die Abschnitte verschieden lang sind.

---

12 Netz eines Doppeltetraeders

2 Punkte

Ergebnis: Siehe Lösungsgrafik: alle 5 fehlenden Symbole korrekt eingetragen.

Der Körper hat 6 Dreiecksflächen. Ordnen Sie die Flächen über gemeinsame Kanten zu: Zwei Dreiecke, die im oberen Netz eine Kante teilen, müssen auch im neuen Netz an derselben Körperkante liegen. Gehen Sie vom vorgegebenen Strich aus und achten Sie bei den Strichen auch auf die Richtung relativ zu den Dreiecksseiten.

Lösung (siehe Grafik): im obersten Dreieck die drei Kreise; in der mittleren Reihe nach dem vorgegebenen Strich links der zweite Strich, dann der Kreis, dann das Dreieck; im untersten Dreieck der Stern.

13 Viertelzylinder

2 Punkte

a) **Ergebnis: 175.9 cm³**

- Volumen eines Viertelzylinders: $V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- $V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 14\,\text{cm}^3 = 56\pi\,\text{cm}^3 \approx 175.9\,\text{cm}^3$

b) **Ergebnis: 15.3 cm**

- Formel nach h umstellen: $V = \frac{1}{4}\pi r^2 h \;\Rightarrow\; h = \frac{4V}{\pi \cdot r^2}$
- $h = \frac{4 \cdot 300}{\pi \cdot 5^2}\,\text{cm} = \frac{1'200}{25\pi}\,\text{cm} \approx 15.3\,\text{cm}$

14 Würfel mit ausgeschnittenen Ecken

2 Punkte

Ergebnis: x = 6 cm

- Kante des grossen Würfels: $x + 2x + x = 4x$, Volumen $(4x)^3 = 64x^3$
- An 8 Ecken wird je ein Würfel mit Kante x entfernt: $8x^3$
- Gleichung: $64x^3 - 8x^3 = 12'096$
- $56x^3 = 12'096$, also $x^3 = 216$
- $x = \sqrt[3]{216} = 6\,\text{cm}$