

Mathematik

90 Minuten · 14 Aufgaben · 40 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner (von der Bildungsdirektion zugelassen) erlaubt
- Konstruktionswerkzeug (Zirkel, Geometrie-Dreieck, Massstab) erlaubt
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Resultate vollständig vereinfachen, falls nichts anderes verlangt ist

1 Terme vereinfachen und faktorisieren

4 Punkte

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

a) $7a^2 - (6a - 3a \cdot (2 + a))$

Term: _____

b) $4x^{m+3} \cdot x^{-2}$

Term: _____

c) $\sqrt{64x^2 + (-4x)^2 + x^2}$

Term: _____

d) Faktorisieren Sie den Term so weit wie möglich.

$$3x^2 - 12x - 96$$

Term: _____

2 Binome und Bruchterme vereinfachen

4 Punkte

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

a) $(x - 4)(x - 2) - (x - 6)^2$

Term: _____

b) $\frac{c}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5c}{2} - \frac{c}{4} \right)$

Term: _____

3 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der Gleichung.

a) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 1.5x + \frac{2 - 5x}{3}$

X: _____

b) $2x^2 + 4x - 2(x + 2)(x - 2) = 16$

x: _____

4 Formeln nach x auflösen

2 Punkte

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Variablen x auf.

a) $\frac{2}{3} = \frac{a + x}{a}$

x: _____

b) $c \cdot (c - 4x) = 2x$

x: _____

5 Haushaltspapier: Fläche und Wasser

2 Punkte

Eine Rolle Haushaltspapier ist 247 mm breit und hat 51 Blätter. Jedes Blatt ist 260 mm lang und wiegt 3.7 g. Für die Herstellung von einem Kilogramm Papier werden 8.7 Liter Wasser benötigt.

- a) Die Rolle wird komplett abgerollt. Berechnen Sie die Fläche des entstandenen Rechtecks in m².

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Fläche: _____ m²

- b) Ein Händler kauft eine Palette von diesem Haushaltspapier. Die Palette umfasst 144 Packungen à 4 Rollen. Berechnen Sie die benötigte Wassermenge für die Herstellung des Papiers dieser Palette in Litern.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Wassermenge: _____ l

6 Bienen: Geschwindigkeit und Distanz

2 Punkte

- a) Die Flügel der Bienen schlagen im Standflug rund 200-mal pro Sekunde. Die Flügelspitzen legen bei jedem Flügelschlag 20 mm zurück.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Flügelspitzen in km/h.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Geschwindigkeit: _____ km/h

- b) Vom Bienenstock zur Futterquelle fliegt die Biene mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 7 m/s. Auf dem Rückflug ist ihre Geschwindigkeit nur noch halb so gross. Hin- und Rückflug dauern zusammen 195 Sekunden.

Berechnen Sie die Entfernung vom Bienenstock zur Futterquelle in Metern.

Entfernung: _____ m

7**Verkehrskontrolle und Zinsrechnung**

3 Punkte

- a) Eine Verkehrskontrolle ergibt, dass 60 % aller kontrollierten Personen zu schnell gefahren sind. Die übrigen 40 % der Personen haben das Tempo eingehalten. Von den Personen, die zu schnell gefahren sind, sind 30 % jünger als 25 Jahre. Die restlichen 63 Personen, die zu schnell unterwegs waren, sind 25 Jahre und älter.

Berechnen Sie, wie viele Personen insgesamt an der Verkehrskontrolle kontrolliert wurden.

Anzahl Personen: _____

- b) Ein Kapital wird 300 Tage lang zu einem jährlichen Zinssatz von 0.4 % verzinst. Der Zins beträgt CHF 50.

Berechnen Sie die Höhe des Kapitals zu Beginn.

Kapital: _____ CHF

8**Gleichungen aufstellen**

3 Punkte

In dieser Aufgabe sollen Gleichungen aufgestellt werden. Das Lösen oder Vereinfachen der Gleichungen ist **nicht** verlangt.

- a) Die Summe einer gesuchten Zahl und ihres Kehrwerts ergibt 4.5.

x

: gesuchte Zahl

Stellen Sie eine Gleichung auf, welche die Situation korrekt beschreibt und in der nur die Variable x vorkommt.

Ihre Gleichung: _____

- b) Lou und Robin verkaufen Ringe und Halsketten. Ein Ring kostet CHF 65 und eine Halskette CHF 95. Heute haben sie doppelt so viele Ringe wie Halsketten verkauft und kommen damit auf Einnahmen von CHF 1350.

x

: Anzahl verkaufter Ringe

Stellen Sie eine Gleichung auf, welche die Situation korrekt beschreibt und in der nur die Variable x vorkommt.

Ihre Gleichung: _____

9 Geraden im Koordinatensystem

4 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden.

Ihre Antwort: $y =$ _____

$y =$: _____

b) Zeichnen Sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $y = -3x + 6$ ins Diagramm.

c) Eine Gerade hat die Steigung 0.8 und schneidet die y -Achse an der Stelle 2. Zeichnen Sie die Gerade ins Diagramm.

- d) Eine Gerade mit der Funktionsgleichung $y = 3x + 7$ wird um 10 Einheiten parallel nach oben verschoben. Geben Sie die Funktionsgleichung der verschobenen Geraden an.

Ihre Antwort: $y =$ _____

$y =$: _____

10 Winkel am Thaleskreis

2 Punkte

- a) Gegeben ist folgende Figur. Die Skizze ist nicht massstabsgetreu.

Der Punkt C liegt auf einem Halbkreis über der Strecke AB. Der Punkt Q liegt auf einem Halbkreis über der Strecke CP. Die beiden Halbkreise haben die Mittelpunkte M_1 und M_2 . Berechnen Sie den Winkel α .

α : _____ °

- b) Gegeben ist folgende Figur. Die Skizze ist nicht massstabsgetreu.

Der Halbkreis hat den Mittelpunkt M. Die Punkte A und B sind Mittelpunkte der beiden Kreisbogen. Berechnen Sie den Winkel β .

β : _____ °

11**Dreieck im Halbkreis**

2 Punkte

Gegeben ist folgende Figur. Die Skizze ist nicht massstabsgetreu.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks MBC.

Fläche: _____ cm²

12**Punkt und Kreis**

2 Punkte

Im abgebildeten Koordinatensystem ist ein Kreis mit Mittelpunkt $M(-3/-1)$ eingezeichnet. Der Punkt $P(3/5)$ liegt auf der Kreislinie.

Kreuzen Sie an, ob der Punkt $Q(5/2)$ auf der Kreislinie, innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

Hinweis: Die Punkte für die richtige Antwort erhalten Sie nur, wenn Sie diese mit einer Rechnung begründen und nur genau eine Antwort ankreuzen.

Ihre Antwort (Q liegt auf der Kreislinie. / Q liegt innerhalb des Kreises. / Q liegt ausserhalb des Kreises.):

13 Dreiviertelzylinder

3 Punkte

Gegeben ist folgender Körper.

Der Punkt M liegt in der Mitte der Grundfläche.

- a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Volumen: _____ cm^3

- b) Berechnen Sie die Länge der Strecke AB.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Länge AB: _____ cm

- c) Berechnen Sie die Steigung der Strecke AB in Prozent.

Genauigkeit: 1 Dezimale.

Steigung: _____ %

14 Zwei Karten umdrehen

3 Punkte

Ein Spiel besteht aus sechs Karten, welche jeweils auf einer Seite mit einer Ziffer beschriftet sind. Auf drei Karten steht eine «1», auf zwei Karten steht eine «2» und auf einer Karte eine «3». Die Karten werden mit verdeckten Ziffern auf einen Tisch gelegt.

Sofia darf zwei verschiedene Karten umdrehen. Die Summe der aufgedeckten Ziffern ist ihr Gewinn.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sofia

a) genau 2 Punkte gewinnt.

p: _____

b) genau 5 Punkte gewinnt.

p: _____

c) die Karte mit der Ziffer «3» **nicht** umdreht.

p: _____

Lösungen

BMS-Aufnahmeprüfung 2024 Mathematik BM2. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen und faktorisieren

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $10a^2$

Zuerst die innere Klammer ausmultiplizieren, dann die Minusklammer auflösen (alle Vorzeichen kehren):

$$7a^2 - (6a - 3a \cdot (2 + a)) = 7a^2 - (6a - 6a - 3a^2) = 7a^2 + 3a^2 = 10a^2$$

b) **Ergebnis:** $4x^{m+1}$

Gleiche Basis: Exponenten addieren.

$$4x^{m+3} \cdot x^{-2} = 4x^{m+3-2} = 4x^{m+1}$$

c) **Ergebnis:** $9x$

Erst unter der Wurzel zusammenfassen, $(-4x)^2 = 16x^2$:

$$\sqrt{64x^2 + 16x^2 + x^2} = \sqrt{81x^2} = 9x$$

d) **Ergebnis:** $3(x - 8)(x + 4)$

- Gemeinsamen Faktor 3 ausklammern: $3x^2 - 12x - 96 = 3(x^2 - 4x - 32)$
- Zwei Zahlen mit Produkt -32 und Summe -4 suchen: -8 und 4 .
- $3(x^2 - 4x - 32) = 3(x - 8)(x + 4)$

2 Binome und Bruchterme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $6x - 28 = 2(3x - 14)$

- Ausmultiplizieren, das Quadrat mit der 2. binomischen Formel in Klammern lassen:
 $(x - 4)(x - 2) - (x - 6)^2 = x^2 - 6x + 8 - (x^2 - 12x + 36)$
- Minusklammer auflösen: $= x^2 - 6x + 8 - x^2 + 12x - 36$
- Zusammenfassen: $= 6x - 28 = 2(3x - 14)$

b) **Ergebnis:** $\frac{5c}{4} = 1.25c$

- $\frac{1}{3}$ in die Klammer multiplizieren: $\frac{c}{2} + \frac{5c}{6} - \frac{c}{12}$
- Auf den Hauptnenner 12 bringen: $\frac{6c}{12} + \frac{10c}{12} - \frac{c}{12} = \frac{15c}{12}$
- Kürzen: $\frac{15c}{12} = \frac{5c}{4} = 1.25c$

3 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = \frac{1}{2} = 0.5$

- Alles auf den Hauptnenner 6 bringen ($1.5x = \frac{9}{6}x$): $\frac{3x}{6} + \frac{2}{6} = \frac{9}{6}x + \frac{4 - 10x}{6}$
- Mit 6 multiplizieren: $3x + 2 = 9x + 4 - 10x$
- Rechts zusammenfassen: $3x + 2 = 4 - x$
- $4x = 2$, also $x = \frac{1}{2} = 0.5$

b) **Ergebnis:** $x = 2$

- 3. binomische Formel: $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$
- $2x^2 + 4x - 2(x^2 - 4) = 16$
- $2x^2 + 4x - 2x^2 + 8 = 16$ (die x^2 fallen weg)
- $4x = 8$, also $x = 2$

4 Formeln nach x auflösen

2 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -\frac{a}{3}$

- Gleichnamig machen (Hauptnenner $3a$): $\frac{2a}{3a} = \frac{3a + 3x}{3a}$
- Zähler gleichsetzen: $2a = 3a + 3x$
- $-3x = a$
- $x = -\frac{a}{3}$

b) **Ergebnis:** $x = \frac{c^2}{2 + 4c} = \frac{c^2}{2(1 + 2c)}$

- Ausmultiplizieren: $c^2 - 4cx = 2x$
- Alle Glieder mit x auf eine Seite: $c^2 = 2x + 4cx$
- x ausklammern: $c^2 = x(2 + 4c)$
- Dividieren: $x = \frac{c^2}{2 + 4c} = \frac{c^2}{2(1 + 2c)}$

5 Haushaltspapier: Fläche und Wasser

2 Punkte

a) **Ergebnis:** $\approx 3.3 \text{ m}^2$

Länge des Rechtecks = 51 Blätter à 260 mm, Breite = 247 mm.

$$51 \cdot 260 \text{ mm} \cdot 247 \text{ mm} = 3\,275\,220 \text{ mm}^2 = 3.275220 \text{ m}^2 \approx 3.3 \text{ m}^2$$

$$(1 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2)$$

b) **Ergebnis:** $\approx 945.6 \text{ l}$

- Gewicht aller Blätter: $51 \cdot 4 \cdot 144 \cdot 3.7 \text{ g} = 108\,691.2 \text{ g} = 108.6912 \text{ kg}$
- Wassermenge: $108.6912 \text{ kg} \cdot 8.7 \text{ l/kg} \approx 945.6 \text{ l}$

6 Bienen: Geschwindigkeit und Distanz

2 Punkte

a) **Ergebnis:** 14.4 km/h

Weg pro Sekunde, dann umrechnen (m/s mal 3.6 ergibt km/h):

$$200 \cdot 20 \text{ mm/s} = 4000 \text{ mm/s} = 4 \text{ m/s} = 14.4 \text{ km/h}$$

b) **Ergebnis:** 455 m

Idee: Bei halber Geschwindigkeit dauert der Rückflug doppelt so lang wie der Hinflug.

Die 195 s teilen sich also im Verhältnis 1 : 2 auf.

- Dauer des Hinflugs: $195 \text{ s} : 3 = 65 \text{ s}$
- Distanz: $65 \text{ s} \cdot 7 \text{ m/s} = 455 \text{ m}$

Alternativ mit Gleichung (x : einfacher Weg in m):

$$\frac{x}{7} + \frac{x}{3.5} = 195 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{2x}{7} = \frac{1365}{7} \Rightarrow 3x = 1365 \Rightarrow x = 455$$

7 Verkehrskontrolle und Zinsrechnung

3 Punkte

a) Ergebnis: 150 Personen

- Die 63 Personen sind die restlichen 70 % der Zu-schnell-Fahrer. Anzahl Personen, die zu schnell unterwegs waren: $\frac{63}{0.7} = 90$
- Diese 90 Personen sind 60 % aller Kontrollierten: $\frac{90}{0.6} = 150$

Insgesamt wurden 150 Personen kontrolliert.

b) Ergebnis: CHF 15 000

- Jahreszins (1 Jahr = 360 Tage): $\text{CHF } 50 \cdot \frac{360}{300} = \text{CHF } 50 \cdot \frac{6}{5} = \text{CHF } 60$
- CHF 60 entsprechen 0.4 %, somit: $100 \% = \frac{60}{0.004} = \text{CHF } 15\,000$

8 Gleichungen aufstellen

3 Punkte

a) Ergebnis: $x + \frac{1}{x} = 4.5$ (oder eine gleichwertige, umgestellte Gleichung)

Gesuchte Zahl	x
Kehrwert der Zahl	$\frac{1}{x}$

Mögliche Gleichung:

$$x + \frac{1}{x} = 4.5$$

Jede gleichwertige, umgestellte Gleichung ist ebenfalls richtig.

b) Ergebnis: $65x + 95 \cdot \frac{x}{2} = 1350$ (oder eine gleichwertige, umgestellte Gleichung)

Doppelt so viele Ringe wie Halsketten heisst: Es sind halb so viele Halsketten wie Ringe.

Anzahl verkaufter Ringe	x
Anzahl verkaufter Halsketten	$\frac{x}{2}$

Mögliche Gleichung (Einnahmen Ringe + Einnahmen Halsketten):

$$65x + 95 \cdot \frac{x}{2} = 1350$$

Jede gleichwertige, umgestellte Gleichung ist ebenfalls richtig.

9 Geraden im Koordinatensystem

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $y = \frac{3}{8}x - 7$ oder $y = 0.375x - 7$

- Die Gerade schneidet die y -Achse bei -7 : Achsenabschnitt $q = -7$.
- Steigung aus zwei Gitterpunkten, z. B. $(0/-7)$ und $(8/-4)$: $m = \frac{-4 - (-7)}{8 - 0} = \frac{3}{8} = 0.375$
- Also $y = \frac{3}{8}x - 7 = 0.375x - 7$

b) **Ergebnis:** Gerade durch $(0/6)$, $(1/3)$, $(2/0)$, $(4/-6)$

- Startpunkt auf der y -Achse: $(0/6)$.
- Steigung -3 : pro Schritt 1 nach rechts 3 nach unten, also $(1/3)$, $(2/0)$, $(3/-3)$, $(4/-6)$, $(5/-9)$.
- Punkte verbinden und die Gerade über das ganze Diagramm ziehen.

c) **Ergebnis:** Gerade $y = 0.8x + 2$, z. B. durch $(-10/-6)$, $(-5/-2)$, $(0/2)$, $(5/6)$, $(10/10)$

- Funktionsgleichung: $y = 0.8x + 2$.
- Startpunkt $(0/2)$. Steigung $0.8 = \frac{4}{5}$: pro 5 nach rechts 4 nach oben.
- Punkte: $(5/6)$, $(10/10)$, $(-5/-2)$, $(-10/-6)$. Verbinden.

d) **Ergebnis:** $y = 3x + 17$

Parallel verschieben heisst: gleiche Steigung 3. Nach oben um 10 verschieben erhöht den Achsenabschnitt um 10: $7 + 10 = 17$.

$$y = 3x + 17$$

10 Winkel am Thaleskreis

2 Punkte

a) **Ergebnis:** $\alpha = 24^\circ$

Idee: Beide Halbkreise sind Thaleskreise, also gibt es zwei rechte Winkel.

- Thales über CP : $\angle CQP = 90^\circ$. Im Dreieck CQP : $\angle QCP = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.
- S sei der Schnittpunkt von AQ mit CP . Im Dreieck CSQ : $\angle CSQ = 180^\circ - 35^\circ - 31^\circ = 114^\circ$, also $\angle ASC = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$.

- Thales über AB : $\angle ACB = 90^\circ$. Im Dreieck ASC : $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$.

b) **Ergebnis:** $\beta = 45^\circ$

Bezeichnungen: C = Punkt auf dem Halbkreis, D = Scheitel von β auf AB , E = Punkt auf BC .

- Thales: $\angle ACB = 90^\circ$, also $\angle CAB = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.
- Der Bogen um A geht durch C und D : $AC = AD$. Gleichschenkliges Dreieck ACD : $\angle ADC = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$.
- Der Bogen um B geht durch E und D : $BE = BD$. Gleichschenkliges Dreieck BDE : $\angle BDE = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.
- Gestreckter Winkel bei D : $\beta = 180^\circ - 63^\circ - 72^\circ = 45^\circ$.

11 Dreieck im Halbkreis

2 Punkte

Ergebnis: $A_{MBC} = 160 \text{ cm}^2$

- C liegt auf dem Kreisbogen um M durch B , also ist $\overline{MC} = \overline{MB} = 20 \text{ cm}$.
- Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck AMC : $\overline{AC} = \sqrt{20^2 - 12^2} \text{ cm} = 16 \text{ cm}$
- $\overline{AC}$ ist die Höhe des Dreiecks MBC zur Grundseite $\overline{MB} = 20 \text{ cm}$: $A_{MBC} = \frac{20 \cdot 16}{2} \text{ cm}^2 = 160 \text{ cm}^2$

12 Punkt und Kreis

2 Punkte

Ergebnis: Q liegt ausserhalb des Kreises ($\overline{MQ} \approx 8.54 > r \approx 8.49$).

Abstände zum Mittelpunkt mit Pythagoras vergleichen:

- Radius: $\overline{MP} = r = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8.49$
- $\overline{MQ} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \approx 8.54$

Die Strecke $\overline{MQ}$ ist länger als der Radius, daher: Q liegt ausserhalb des Kreises.

13 Dreiviertelzylinder

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $V \approx 4712.4 \text{ cm}^3$

Der Körper ist ein Zylinder ($r = 10 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$), bei dem ein Viertel fehlt:

$$V = \frac{3}{4} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ cm}^3 \approx 4712.4 \text{ cm}^3$$

b) **Ergebnis:** $\overline{AB} \approx 24.5 \text{ cm}$

- Am Boden: A und der Punkt unter B liegen je 10 cm von M entfernt, mit rechtem Winkel bei M . Horizontale Distanz: $\sqrt{10^2 + 10^2} \text{ cm}$.
- Dazu die Höhe 20 cm (Raumdiagonale mit Pythagoras):

$$\overline{AB} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 20^2} \text{ cm} \approx 24.5 \text{ cm}$$

c) **Ergebnis:** $\approx 141.4 \%$

Steigung = Höhenunterschied : horizontale Distanz:

$$\frac{20}{\sqrt{10^2 + 10^2}} \approx 1.414 = 141.4 \%$$

14 Zwei Karten umdrehen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $p = \frac{1}{5} = 0.2 = 20 \%$

2 Punkte gibt es nur mit «1» und «1». Ziehen ohne Zurücklegen:

$$p = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0.2 = 20 \%$$

b) **Ergebnis:** $p = \frac{2}{15} \approx 0.133 \approx 13.3 \%$

5 Punkte gibt es mit «2» und «3», in zwei Reihenfolgen (zuerst «2», dann «3» oder umgekehrt):

$$p = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0.133 \approx 13.3 \%$$

c) **Ergebnis:** $p = \frac{2}{3} \approx 0.667 \approx 66.7 \%$

Beide Karten müssen aus den fünf Karten ohne «3» stammen:

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.667 \approx 66.7 \%$$