

Mathematik

90 Minuten · 9 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Taschenrechner aus der Sekundarschule (nicht programmierbar, nicht grafik- oder algebrafähig)
 - Lösungswege lückenlos dokumentieren
 - Kein zusätzliches Notizpapier
-

1 Terme vereinfachen

Vereinfache so weit wie möglich. Alle Endresultate müssen vollständig gekürzt werden.

Alle Variablen stehen für positive Zahlen.

a)

$$\sqrt{121x^2 - 4x \cdot 10x}$$

Resultat: _____

b)

$$-(8a - 7b) - 5(a - 2b)$$

Resultat: _____

c)

$$\frac{-a}{7} - \frac{-11a}{2}$$

Resultat: _____

d)

$$x^2 : \frac{2xy}{6y}$$

Resultat: _____

2 Wurzel- und Bruchterme

Vereinfache so weit wie möglich. Alle Endresultate müssen vollständig gekürzt werden.

Alle Variablen stehen für positive Zahlen.

a)

$$\frac{6x - \sqrt{7x \cdot 7x}}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{72x}} + \frac{\sqrt{36x^2}}{8x}$$

Resultat: _____

b)

$$\frac{9x^2 - 6x}{7xy} \cdot \frac{10y - 10}{15xy - 10y}$$

Resultat: _____

3 Lineare Gleichungen lösen

- a) Löse die Gleichung nach t auf und schreibe das Resultat als vollständig gekürzten Bruch:

$$3(13t + 9) - 6(4t - 5) = 32$$

t : _____

- b) Löse die Gleichung nach x auf:

$$\frac{2(x + 5)}{3} - \frac{3x - 1}{5} = 4$$

x : _____

4 Läufer auf der Rennstrecke

Adrian und Beat trainieren zusammen auf einer 400 m langen, runden Rennstrecke. Adrian läuft in 12 Minuten 3.5 km weit. Beat rennt mit 20 km/h.

- a) Berechne die Geschwindigkeit von Adrian in km/h.

Geschwindigkeit Adrian: _____ km/h

- b) Wie lange benötigt Beat für 15 Runden?

Zeit: _____ min

- c) Beide starten gleichzeitig von der Startlinie aus und rennen im Uhrzeigersinn. Wie lange dauert es, bis der langsamere Läufer das erste Mal überholt wird?

Zeit: _____ min

5 Erdaushub und Stundenlohn

- a) In einer Baugrube befinden sich 400 m^3 feste, zusammengepresste Erde, die abtransportiert werden soll. Beim Verladen auf Lastwagen lockert sich die Erde auf und nimmt dabei um 14% an Volumen zu. Wie oft muss ein Lastwagen mit einem Ladevolumen von 12 m^3 fahren, um die gesamte Erde abzutransportieren?

Anzahl Fahrten: _____ Fahrten

- b) Der Stundenlohn eines Arbeiters wurde während einer Wirtschaftskrise um 12% gekürzt. Als diese vorbei war, wurde der Stundenlohn wieder um 12% angehoben. Wie hoch war der Stundenlohn ursprünglich, wenn der Arbeiter heute CHF 33.35 pro Stunde verdient? Runde das Endergebnis auf 5 Rappen genau.

Ursprünglicher Stundenlohn: _____ CHF

6**Rechtecke mit Fläche 24**

a) Zeichne im Koordinatensystem alle **Rechtecke** ein, die alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

- Eine Ecke liegt im Nullpunkt.
- Zwei weitere Ecken liegen auf den Koordinatenachsen.
- Der Flächeninhalt ist 24.
- Die Seitenlängen sind ganzzahlig.
- Das Rechteck hat im vorgegebenen Ausschnitt des Koordinatensystems Platz.

(Ein erstes Rechteck ist schon eingezeichnet.)

- b) Wie hoch ist das Rechteck mit Flächeninhalt 24, wenn die Grundseite, die auf der x-Achse liegt, die Länge 5 hat?

Höhe: _____

- c) Wie lang ist die Höhe y des Rechtecks mit Flächeninhalt 24, wenn die Grundseite, die auf der x-Achse liegt, die Länge x hat?

(Notiere die Formel, mit der y berechnet werden kann.)

$y =$

y : _____

- d) Kreuze die **beiden** Wörter an, die den folgenden Satz korrekt vervollständigen. (Setze genau 2 Kreuze.)

Bei allen eingezeichneten Rechtecken sind die Grundseite x und die Höhe y zueinander

- proportional.
- umgekehrt proportional.
- senkrecht.
- parallel.
- linear.
- distributiv.
- kommutativ.
- assoziativ.

proportional (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

umgekehrt proportional (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

senkrecht (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

parallel (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

linear (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

distributiv (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

kommutativ (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

assoziativ (ankreuzen / nicht ankreuzen): _____

7 Korbwürfe und Früchte ziehen

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a1) Ein Basketballspieler trifft den Korb durchschnittlich bei 7 von 10 Würfeln. Er wirft 3 Mal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei allen 3 Würfeln?

Wahrscheinlichkeit: _____

a2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mindestens einmal?

Wahrscheinlichkeit: _____

b1) Jemand möchte zwei Früchte essen. Er wählt aus einem Korb mit 4 Pfirsichen, 3 Äpfeln und 2 Birnen zufällig nacheinander zwei Früchte aus.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man 2 Birnen?

Wahrscheinlichkeit: _____

b2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man eine Birne und einen Apfel?

Wahrscheinlichkeit: _____

8 Drachenviereck mit Kreisbogen

Im abgebildeten Drachenviereck ist die Länge der Diagonalen $\overline{BD} = 7.2 \text{ cm}$.

Auch die beiden Radien der Kreisbogen sind bekannt: $r_1 = 1.5 \text{ cm}$, $r_2 = 4.8 \text{ cm}$.

Die beiden Kreisbogen berühren sich im Punkt M. Die Punkte A und C sind die zugehörigen Kreismittelpunkte.

Ausserdem misst der Winkel $\varepsilon = 69^\circ$ (siehe Abbildung).

a) Wie lang ist der Umfang des Drachenvierecks?

Umfang: _____ cm

- b) Wie lang ist der Umfang der grau eingefärbten Fläche?

Umfang: _____ cm

9 Turm aus Quader und Pyramide

Die folgende Figur zeigt einen Turm, welcher zusammengesetzt ist aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche und einer geraden Pyramide.

- a) Das Volumen der Pyramide ist ein Fünftel so gross ist wie das Volumen des Quaders. Berechne die Höhe h der Pyramide.

h : _____ cm

- b) Berechne die Länge der Strecke SA .

(Falls du die Höhe h aus Teilaufgabe a) nicht berechnen konntest, kannst du für h den Wert 6 cm verwenden.)

SA: _____ cm

Lösungen

FMS-Aufnahmeprüfung 2021 Mathematik FMS. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen

a) **Ergebnis:** $9x$

- Zuerst unter der Wurzel rechnen: $4x \cdot 10x = 40x^2$.
- $121x^2 - 40x^2 = 81x^2$
- $\sqrt{81x^2} = 9x$ (da x positiv ist).

b) **Ergebnis:** $-13a + 17b$

- Klammern auflösen (Minus vor der Klammer kehrt alle Vorzeichen um): $-8a + 7b - 5a + 10b$
- Zusammenfassen: $-13a + 17b$

c) **Ergebnis:** $\frac{75a}{14}$

- Minus mal Minus ergibt Plus: $-\frac{a}{7} + \frac{11a}{2}$
- Gemeinsamer Nenner 14: $-\frac{2a}{14} + \frac{77a}{14}$
- $= \frac{75a}{14}$

d) **Ergebnis:** $3x$

- Durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren: $x^2 \cdot \frac{6y}{2xy}$
- $= \frac{6x^2y}{2xy}$
- Kürzen durch $2xy$: $3x$

2 Wurzel- und Bruchterme

a) **Ergebnis:** $\frac{2}{3}$

- Wurzeln ausrechnen: $\sqrt{7x \cdot 7x} = \sqrt{49x^2} = 7x$, $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{72x} = \sqrt{144x^2} = 12x$, $\sqrt{36x^2} = 6x$
- Einsetzen: $\frac{6x-7x}{12x} + \frac{6x}{8x} = \frac{-x}{12x} + \frac{6x}{8x}$
- Kürzen: $-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

b) **Ergebnis:** $\frac{6(y-1)}{7y^2} = \frac{6y-6}{7y^2}$

- Zähler und Nenner faktorisieren: $9x^2 - 6x = 3x(3x - 2)$, $10y - 10 = 10(y - 1)$,
 $15xy - 10y = 5y(3x - 2)$
 - $\frac{3x(3x-2)}{7xy} \cdot \frac{10(y-1)}{5y(3x-2)}$
 - Kürzen durch x und $(3x - 2)$: $\frac{3 \cdot 10(y-1)}{7y \cdot 5y} = \frac{30(y-1)}{35y^2}$
 - Durch 5 kürzen: $\frac{6(y-1)}{7y^2}$
-

3 Lineare Gleichungen lösen

a) **Ergebnis:** $t = -\frac{5}{3}$

- Klammern auflösen: $39t + 27 - 24t + 30 = 32$
- Zusammenfassen: $15t + 57 = 32$
- $15t = -25$
- $t = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3}$

b) **Ergebnis:** $x = 7$

- Mit dem Hauptnenner 15 multiplizieren: $10(x + 5) - 3(3x - 1) = 60$
 - Klammern auflösen (Minus vor der Klammer!): $10x + 50 - 9x + 3 = 60$
 - $x + 53 = 60$
 - $x = 7$
-

4 Läufer auf der Rennstrecke

a) **Ergebnis:** $v = 17.5 \text{ km/h}$

- 12 Minuten sind $\frac{1}{5}$ Stunde ($60 : 12 = 5$).
- In einer Stunde läuft Adrian also $5 \cdot 3.5 \text{ km} = 17.5 \text{ km}$.
- $v = 17.5 \text{ km/h}$

b) **Ergebnis:** $t = 0.3 \text{ h} = 18 \text{ min}$

- Strecke: $15 \cdot 400 \text{ m} = 6000 \text{ m} = 6 \text{ km}$
- Zeit = Strecke : Geschwindigkeit: $t = 6 : 20 = 0.3 \text{ h}$
- $0.3 \text{ h} = 0.3 \cdot 60 \text{ min} = 18 \text{ min}$

c) **Ergebnis:** $t = 0.16 \text{ h} = 9.6 \text{ min}$

- Idee: Beat überholt Adrian, sobald er genau eine Runde (0.4 km) mehr gelaufen ist.
 - Beat holt pro Stunde $20 - 17.5 = 2.5 \text{ km}$ auf.
 - $t = 0.4 : 2.5 = 0.16 \text{ h}$
 - $0.16 \cdot 60 = 9.6 \text{ min}$ (= 9 min 36 s)
-

5 Erdaushub und Stundenlohn

a) **Ergebnis: 38 Fahrten**

- Volumen der lockeren Erde: $400 \text{ m}^3 \cdot 1.14 = 456 \text{ m}^3$
- Anzahl Fahrten: $456 : 12 = 38$
- Der Lastwagen muss 38 Mal fahren.

b) **Ergebnis: CHF 33.85**

- Achtung: -12% und danach +12% ergeben nicht wieder den alten Lohn, denn die 12% beziehen sich auf verschiedene Grundwerte.
 - Ursprünglicher Lohn x : $x \cdot 0.88 \cdot 1.12 = 33.35$
 - $x \cdot 0.9856 = 33.35$
 - $x = 33.35 : 0.9856 \approx 33.837$
 - Auf 5 Rappen gerundet: CHF 33.85
-

6 Rechtecke mit Fläche 24

a) **Ergebnis: 8 Rechtecke:** $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1$
(Breite $\times$ Höhe)

- Gesucht sind alle ganzzahligen Seitenlängen x (auf der x-Achse) und y (auf der y-Achse) mit $x \cdot y = 24$.
- Teiler von 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Das ergibt die Paare $(1|24)$, $(2|12)$, $(3|8)$, $(4|6)$, $(6|4)$, $(8|3)$, $(12|2)$, $(24|1)$.
- Alle passen in den Ausschnitt (x bis 27, y bis 25).
- Jedes Rechteck zeichnen Sie mit einer Ecke im Nullpunkt, eine Seite auf der x-Achse und eine auf der y-Achse. Zusammen mit dem vorgegebenen Rechteck 12×2 sind es 8 Rechtecke.

b) **Ergebnis: 4.8**

- Fläche = Grundseite · Höhe, also Höhe = Fläche : Grundseite.
- $24 : 5 = 4.8$

c) **Ergebnis: $y = 24 : x$ oder $y = \frac{24}{x}$**

- Aus $x \cdot y = 24$ folgt durch Division mit x : $y = \frac{24}{x}$

d) **Ergebnis: umgekehrt proportional und senkrecht**

- Das Produkt $x \cdot y = 24$ bleibt immer gleich: Wird x doppelt so gross, wird y halb so gross. Das heisst **umgekehrt proportional**.
- Grundseite und Höhe eines Rechtecks stehen im rechten Winkel zueinander, sie sind also **senkrecht**.

7 Korbwürfe und Früchte ziehen

a1) **Ergebnis: $0.343 = 34.3\%$**

- Trefferwahrscheinlichkeit pro Wurf: 0.7
- Drei Treffer nacheinander (Pfadregel: multiplizieren): $0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.343 = 34.3\%$

a2) **Ergebnis: $0.973 = 97.3\%$**

- Geschickt über das Gegenereignis: «mindestens einmal» ist das Gegenteil von «nie».
- Kein Treffer: $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.027$

- $1 - 0.027 = 0.973 = 97.3\%$

b1) **Ergebnis:** $\frac{1}{36} \approx 0.02778 = 2.778\%$

- Im Korb liegen $4 + 3 + 2 = 9$ Früchte. Die erste Frucht wird nicht zurückgelegt.
- 1. Frucht Birne: $\frac{2}{9}$, danach 2. Frucht Birne: $\frac{1}{8}$
- $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36} \approx 2.778\%$

b2) **Ergebnis:** $\frac{1}{6} \approx 0.1667 = 16.67\%$

- Zwei Reihenfolgen sind möglich: erst Birne, dann Apfel oder erst Apfel, dann Birne.
- Birne, Apfel: $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{72}$
- Apfel, Birne: $\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}$
- Summe: $\frac{12}{72} = \frac{1}{6} \approx 16.67\%$

8 Drachenviereck mit Kreisbogen

a) **Ergebnis:** $u = 19.8 \text{ cm}$

- Die Diagonalen eines Drachenvierecks stehen senkrecht aufeinander, M halbiert $\overline{BD}$:
 $\overline{MD} = \overline{MB} = 3.6 \text{ cm}$.
- $\overline{AM} = r_1 = 1.5 \text{ cm}$, $\overline{MC} = r_2 = 4.8 \text{ cm}$
- Pythagoras im Dreieck AMD: $\overline{AD} = \sqrt{1.5^2 + 3.6^2} = \sqrt{15.21} = 3.9 \text{ cm}$
- Pythagoras im Dreieck MCD: $\overline{CD} = \sqrt{4.8^2 + 3.6^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$
- Umfang: $u = 2 \cdot (3.9 + 6) = 19.8 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** $u = 7.8 \text{ cm}$

- Die graue Fläche wird von drei Linien begrenzt: dem Stück von $\overline{AD}$ ausserhalb des kleinen Kreises, der Strecke $\overline{MD}$ und dem Kreisbogen mit Radius r_1 .
- Stück auf $\overline{AD}$: $3.9 - 1.5 = 2.4 \text{ cm}$
- $\overline{MD} = 3.6 \text{ cm}$
- Kreisbogen mit Winkel $\varepsilon = 69^\circ$: $b = 2 \cdot \pi \cdot 1.5 \cdot \frac{69^\circ}{360^\circ} \approx 1.806 \text{ cm}$
- Umfang: $2.4 + 3.6 + 1.806 \approx 7.8 \text{ cm}$

9 Turm aus Quader und Pyramide

a) **Ergebnis:** $h = 9 \text{ cm}$

- Volumen Quader: $12 \cdot 12 \cdot 15 = 2160 \text{ cm}^3$
- Volumen Pyramide: $2160 : 5 = 432 \text{ cm}^3$
- Pyramidenformel: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit $G = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$
- $432 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot h = 48 \cdot h$, also $h = 9 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** $\overline{SA} = \sqrt{648} \approx 25.456 \text{ cm}$ (mit $h = 6 \text{ cm}$: $\overline{SA} = \sqrt{513} \approx 22.6495 \text{ cm}$)

- S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche. Gesucht ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit einer senkrechten und einer waagrechten Kathete.
- Senkrechte Kathete: Turmhöhe $15 + 9 = 24 \text{ cm}$
- Waagrechte Kathete: halbe Diagonale des Quadrats, $\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, also im Quadrat 72 cm^2
- $\overline{SA} = \sqrt{24^2 + 72} = \sqrt{576 + 72} = \sqrt{648} \approx 25.456 \text{ cm}$
- Mit $h = 6 \text{ cm}$: $\sqrt{21^2 + 72} = \sqrt{513} \approx 22.6495 \text{ cm}$