

Mathematik · 2. Sek

90 Minuten · 10 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
 - Kein zusätzliches Notizpapier
 - Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
-

1 Bruchgleichung und Bruchterm

- a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

$$\frac{18 - 6x}{16} - \frac{4x + 100}{24} = 4$$

x: _____

- b) Vereinfache den Term soweit wie möglich. Das Ergebnis muss aus einem gekürzten Bruch bestehen:

$$\frac{4x - (3y - 1)}{12} - \frac{3(2x - y) + 5}{20}$$

Term: _____

2 Teilnehmende im Ferienlager

3 Punkte

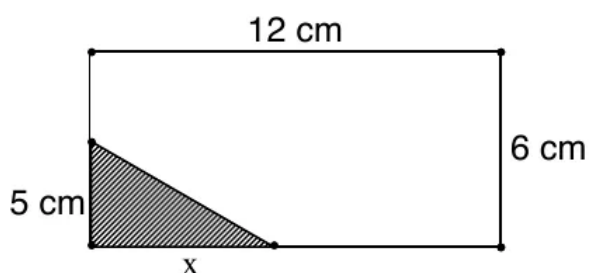
Zwei Fünftel aller Teilnehmenden eines Ferienlagers sind Knaben. Drei Zwanzigstel der Knaben und zwei Fünftel der Mädchen sind noch nicht 16 Jahre alt. 35 teilnehmende Personen sind mindestens 16 Jahre alt.

Wie viele Personen nehmen am Lager teil?

Anzahl Personen: _____ Personen

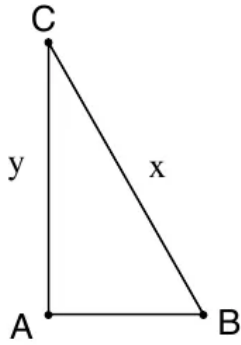
3 Dreiecke im Rechteck

- a) Von der Rechtecksfläche ist $\frac{1}{9}$ schraffiert. Berechne die fehlende Grösse x des schraffierten Dreiecks.



x: _____ cm

- b) Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\alpha = 90^\circ$ und $\beta = 60^\circ$. Die Seite AB misst $5 \cdot \sqrt{3}$ cm. Berechne x und y .



x: _____ cm

y: _____ cm

4 Mitgliederbeitrag eines Vereins

3 Punkte

Ein Verein zählt aktuell 450 Mitglieder, die alle den gleichen jährlichen Mitgliederbeitrag bezahlen. Durch eine Senkung des Mitgliederbeitrages um Fr. 25 hofft der Verein, seinen Mitgliederbestand um $\frac{1}{3}$ zu erhöhen und dadurch Mehreinnahmen von Fr. 1200 zu erhalten. Wie viel beträgt der aktuelle Mitgliederbeitrag?

Hinweis: Für die volle Punktzahl ist die Aufgabe mit einer Gleichung zu lösen!

Aktueller Mitgliederbeitrag: _____ Fr.

5 Dritte Zahl zum kgV

4 Punkte

Gegeben sind die Zahlen 168 und 126. Finde eine dritte natürliche Zahl, sodass das kgV der drei Zahlen 1512 ist. Es sind alle 8 Lösungen anzugeben!

Alle Lösungen (aufsteigend): _____

6 Mengen in aufzählender Form

Gegeben ist die Grundmenge $\mathbb{G} = \{(-10), (-9), (-8), \dots, 49, 50\}$.

Notiere die gesuchten Mengen $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ in aufzählender Form.

a) Menge $\mathbb{A}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: $\sqrt{x} < 5$

b) Menge $\mathbb{B}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: $x^2 < 10^2$

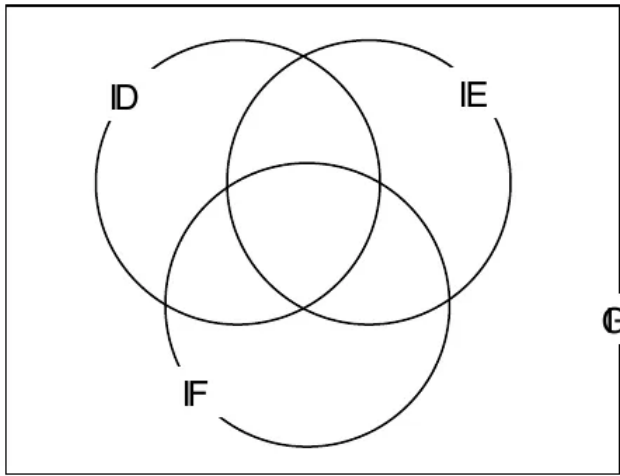
c) Menge $\mathbb{C}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: x ist positiv und hat genau drei Teiler.

C: _____

7 Menge im Venn-Diagramm

2 Punkte

Schraffiere die Menge $(\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{E}) \cap (\mathbb{F} \cup \mathbb{D})$ im untenstehenden Venn-Diagramm.



8 Prisma mit achteckiger Grundfläche

Der untenstehende Körper kann als senkrecht Prisma mit achteckiger Grundfläche aufgefasst werden. Die Masszahlen kannst Du der Skizze entnehmen. (Masseinheit = 1 cm)

Hinweis: Der Körper ist nicht massstabsgetreu gezeichnet!

a) Berechne das Volumen des ganzen Körpers.

V: _____ cm³

b) Berechne die Länge der Strecke AB.

AB: _____ cm

9 Parallelogramm konstruieren

4 Punkte

Von einem Parallelenviereck ABCD mit der halben Diagonale AM weiss man, dass die Ecke B auf der Geraden g und die Ecke D auf der Geraden h liegt. Konstruiere das Parallelenviereck ABCD und schreibe einen Konstruktionsbericht!

10 Fährschiffe auf dem Zürichsee

4 Punkte

Zwei Fährschiffe auf dem Zürichsee verkehren zwischen Meilen und Horgen. Schiff A fährt mit einer Geschwindigkeit von $0.2 \frac{\text{km}}{\text{min}}$, Schiff B mit $0.25 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Die Schiffe fahren gleichzeitig los: Schiff A von Horgen Richtung Meilen, Schiff B umgekehrt, von Meilen Richtung Horgen. Die Schiffe erreichen die gegenüberliegende 2.7 km entfernte Seeseite und fahren dann wieder zurück.

Wie weit von Meilen entfernt kreuzen sich die Schiffe bei der Rückfahrt, wenn für beide Schiffe der Zwischenhalt genau gleich lang war?

Entfernung von Meilen: _____ m

Lösungen

Gymiprüfung 2008 Mathematik (2. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Bruchgleichung und Bruchterm

a) **Ergebnis:** $x = -13$, also $\mathbb{L} = \{-13\}$

- Hauptnenner von 16 und 24 ist 48. Multipliziere die ganze Gleichung mit 48:

$$3(18 - 6x) - 2(4x + 100) = 192$$

- Klammern auflösen (Achtung: das Minus vor der zweiten Klammer!):

$$54 - 18x - 8x - 200 = 192$$

- Zusammenfassen: $-26x - 146 = 192$, also $-26x = 338$.
- $x = 338 : (-26) = -13$

$$\mathbb{L} = \{-13\}$$

b) **Ergebnis:** $\frac{x - 3y - 5}{30}$

- Zähler vereinfachen: $4x - (3y - 1) = 4x - 3y + 1$ und $3(2x - y) + 5 = 6x - 3y + 5$.
- Hauptnenner von 12 und 20 ist 60. Erweitere mit 5 bzw. 3:

$$\frac{5(4x - 3y + 1) - 3(6x - 3y + 5)}{60}$$

- Zähler ausmultiplizieren: $20x - 15y + 5 - 18x + 9y - 15 = 2x - 6y - 10$
- Kürzen mit 2:

$$\frac{2x - 6y - 10}{60} = \frac{x - 3y - 5}{30}$$

2 Teilnehmende im Ferienlager

3 Punkte

Ergebnis: 50 Personen

- Knaben: $\frac{2}{5}$ aller Teilnehmenden, Mädchen: $\frac{3}{5}$.
- Unter 16 sind:
 - Knaben: $\frac{3}{20} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{100}$ aller Teilnehmenden
 - Mädchen: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = \frac{24}{100}$ aller Teilnehmenden
- Zusammen unter 16: $\frac{30}{100}$, also sind $\frac{70}{100}$ mindestens 16 Jahre alt.
- $\frac{70}{100}$ entsprechen 35 Personen, also $\frac{10}{100}$ entsprechen 5 Personen.
- Alle: $10 \cdot 5 = 50$ Personen.

3 Dreiecke im Rechteck

a) **Ergebnis:** $x = \frac{16}{5} \text{ cm} = 3.2 \text{ cm}$

- Rechtecksfläche: $12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$
- Schraffiert: $\frac{1}{9} \cdot 72 = 8 \text{ cm}^2$
- Das Dreieck ist rechtwinklig mit den Katheten 5 cm und x :

$$\frac{5 \cdot x}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad 5x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 3.2 \text{ cm}$$

b) **Ergebnis:** $x = 10\sqrt{3} \text{ cm} \approx 17.321 \text{ cm}, y = 15 \text{ cm}$

Idee: Ein Dreieck mit den Winkeln $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck.

- Der Winkel bei C ist $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
- Spiegelst du das Dreieck an AC, entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge x . AB ist die Hälfte davon:

$$x = 2 \cdot AB = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \approx 17.321 \text{ cm}$$

- Pythagoras für y :

$$y^2 = x^2 - AB^2 = 300 - 75 = 225 \quad \Rightarrow \quad y = 15 \text{ cm}$$

4 Mitgliederbeitrag eines Vereins

3 Punkte

Ergebnis: Fr. 108

- Aktueller Beitrag: b Franken. Einnahmen heute: $450 \cdot b$.
- Neu: $450 + \frac{1}{3} \cdot 450 = 600$ Mitglieder, Beitrag $b - 25$.
- Neue Einnahmen = alte Einnahmen + 1200:

$$600(b - 25) = 450b + 1200$$

- $600b - 15000 = 450b + 1200$
- $150b = 16200 \Rightarrow b = 108$

Der aktuelle Beitrag beträgt Fr. 108.

5 Dritte Zahl zum kgV

4 Punkte

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{27, 54, 108, 189, 216, 378, 756, 1512\}$

- Primfaktoren:
 - $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
 - $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
 - $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
- Die dritte Zahl muss ein Teiler von 1512 sein (sonst wäre das kgV grösser).
- Der Faktor $3^3 = 27$ kommt in 168 und 126 nicht vor, also muss die dritte Zahl 27 enthalten.
- 2^3 und 7 liefern schon 168 und 126. Die dritte Zahl darf daher zusätzlich 1, 2, 4 oder 8 und 1 oder 7 als Faktor haben:
 - $27 \cdot \{1, 2, 4, 8\} = 27, 54, 108, 216$
 - $189 \cdot \{1, 2, 4, 8\} = 189, 378, 756, 1512$

6 Mengen in aufzählender Form

a) **Ergebnis:** $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$

- Die Wurzel gibt es nur für $x \geq 0$. Die negativen Zahlen fallen also weg.
- $\sqrt{x} < 5$ heisst $x < 25$.
- $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$

b) **Ergebnis:** $\mathbb{B} = \{(-9), (-8), (-7), \dots, 9\}$

- $x^2 < 100$ gilt für alle Zahlen zwischen -10 und 10 (ohne die Grenzen), denn auch negative Zahlen ergeben ein positives Quadrat.
- $(-10)^2 = 100$ ist nicht kleiner als 100 , also gehört -10 nicht dazu.
- $\mathbb{B} = \{(-9), (-8), (-7), \dots, 9\}$

c) **Ergebnis:** $\mathbb{C} = \{4, 9, 25, 49\}$

- Genau drei Teiler haben nur Quadrate von Primzahlen: p^2 hat die Teiler $1, p$ und p^2 .
- Quadrate von Primzahlen bis 50 : $2^2 = 4, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49$.
- $\mathbb{C} = \{4, 9, 25, 49\}$

7 Menge im Venn-Diagramm

2 Punkte

Ergebnis: Schraffiert ist der Teil von $\mathbb{F}$, der weder in $\mathbb{D}$ noch in $\mathbb{E}$ liegt.

- $\overline{\mathbb{D}}$ ist alles ausserhalb von $\mathbb{D}$.
- $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{E}$: davon nimmst du noch $\mathbb{E}$ weg. Übrig bleibt alles, was weder in $\mathbb{D}$ noch in $\mathbb{E}$ liegt.
- Geschnitten mit $\mathbb{F} \cup \mathbb{D}$: Da $\mathbb{D}$ schon ausgeschlossen ist, bleibt nur der Teil von $\mathbb{F}$ übrig.
- Schraffiere also das Stück von $\mathbb{F}$, das nicht in $\mathbb{D}$ und nicht in $\mathbb{E}$ liegt.

8 Prisma mit achteckiger Grundfläche

a) **Ergebnis:** $V = 840 \text{ cm}^3$

Teile die Grundfläche (Vorderseite) in ein Rechteck und ein Trapez.

- Rechteck unten: $20 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^2$
- Trapez oben: Die untere Seite ist $20 - 2 - 2 = 16 \text{ cm}$, die obere 4 cm .
 - Jeder Schenkel (10 cm) ragt waagrecht $(16 - 4) : 2 = 6 \text{ cm}$ vor.
 - Höhe nach Pythagoras: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$
 - Fläche: $\frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80 \text{ cm}^2$

- Grundfläche: $60 + 80 = 140 \text{ cm}^2$
- Prismahöhe (Tiefe) ist 6 cm: $V = 140 \cdot 6 = 840 \text{ cm}^3$

b) **Ergebnis:** $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$

Idee: AB ist die Raumdiagonale eines Quaders.

- Von A nach B gehst du 2 cm nach rechts, 3 cm nach unten und 6 cm nach hinten.
- Raumdiagonale:

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

9 Parallelogramm konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: C = Spiegelung von A an M; B = Schnittpunkt von g mit h' (h an M gespiegelt); D = Schnittpunkt der Geraden BM mit h.

Idee: Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. M ist also das Zentrum, an dem A auf C und B auf D gespiegelt wird.

1. Spiegle A an M, das ergibt C.
2. D liegt auf h, also liegt B (das Spiegelbild von D) auf dem Spiegelbild von h. Spiegle h an M, das ergibt h'.
3. B liegt auch auf g: Der Schnittpunkt $h' \cap g$ ist B.
4. Zeichne die Gerade BM. Ihr Schnittpunkt mit h ist D.
5. Verbinde A, B, C, D zum Parallelogramm.

10 Fährschiffe auf dem Zürichsee

4 Punkte

Ergebnis: 900 m von Meilen entfernt

Idee: Der Zwischenhalt ist für beide gleich lang, du kannst ihn also weglassen und nur die reine Fahrzeit betrachten.

- Bis zum Kreuzen auf der Rückfahrt legen beide Schiffe zusammen 3 Seebreiten zurück:
 $3 \cdot 2.7 = 8.1 \text{ km}$.
- Reine Fahrzeit t (in min): $0.25t + 0.2t = 8.1$, also $0.45t = 8.1$ und $t = 18 \text{ min}$.
- Schiff A fährt in dieser Zeit $18 \cdot 0.2 = 3.6 \text{ km}$.
- A ist zuerst 2.7 km von Horgen nach Meilen gefahren und dann schon $3.6 - 2.7 = 0.9 \text{ km}$ zurück Richtung Horgen.

Die Schiffe kreuzen sich $0.9 \text{ km} = 900 \text{ m}$ von Meilen entfernt.

Kontrolle: B fährt in 18 min 4.5 km , also 2.7 km hin und 1.8 km zurück. Von Meilen aus:
 $2.7 - 1.8 = 0.9 \text{ km}$.