

Mathematik · 3. Sek

90 Minuten · 10 Aufgaben · 37 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
 - Kein zusätzliches Notizpapier
 - Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
-

1 Gleichung und Bruchterm

a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

$$\frac{2 \cdot (3 - 5x)}{15} - \frac{6 \cdot (5 - 3x)}{25} + \frac{1}{5} = 3$$

x: _____

b) Vereinfache den Term soweit wie möglich. Das Ergebnis muss aus einem gekürzten Bruch bestehen:

$$\frac{x - 4y}{a^2 + ab} : \frac{2x - 8y}{a + b} + \frac{6}{b}$$

Term: _____

2 Ferienlager-Teilnehmende

3 Punkte

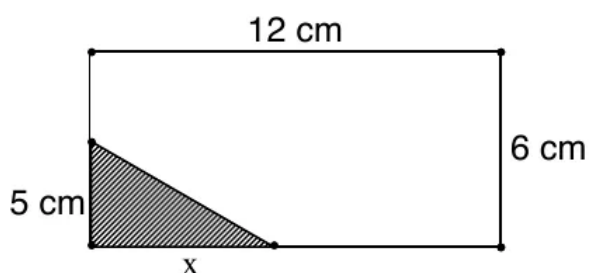
40% aller Teilnehmenden eines Ferienlagers sind Knaben. 15% der Knaben und 40% der Mädchen sind noch nicht 16 Jahre alt. 35 teilnehmende Personen sind mindestens 16 Jahre alt.

Wie viele Personen nehmen am Lager teil?

Anzahl Personen: _____ Personen

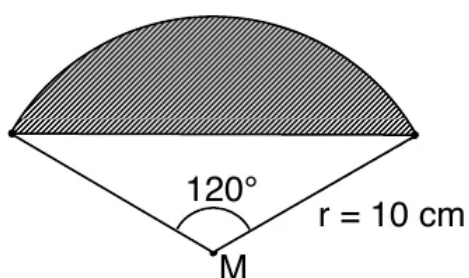
3 Dreieck und Kreissegment

- a) Von der Rechtecksfläche ist $\frac{1}{9}$ schraffiert. Berechne die fehlende Grösse x des schraffierten Dreiecks.



x : _____ cm

- b) Berechne den Flächeninhalt der schraffierten Teilfläche des Kreissektors. Runde auf drei Stellen nach dem Komma!



Fläche: _____ cm²

4 Mitgliederbeitrag eines Vereins

3 Punkte

Ein Verein zählt aktuell 450 Mitglieder, die alle den gleichen jährlichen Mitgliederbeitrag bezahlen. Durch eine Senkung des Mitgliederbeitrages um Fr. 25 hofft der Verein, seinen Mitgliederbestand um $\frac{1}{3}$ zu erhöhen und dadurch Mehreinnahmen von Fr. 1200 zu erhalten. Wie viel beträgt der aktuelle Mitgliederbeitrag?

Hinweis: Für die volle Punktzahl ist die Aufgabe mit einer Gleichung zu lösen!

Aktueller Beitrag: _____ Fr.

5 Drei Zahlen mit kgV 1512

4 Punkte

Gegeben sind die Zahlen 168 und 126. Finde eine dritte natürliche Zahl, sodass das kgV der drei Zahlen 1512 ist. Es sind alle 8 Lösungen anzugeben!

6 Mengen aufzählend notieren

Gegeben ist die Grundmenge $\mathbb{G} = \{(-10), (-9), (-8), \dots, 49, 50\}$.

Notiere die gesuchten Mengen $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ in aufzählender Form.

a) Menge $\mathbb{A}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: $\sqrt{x} < 5$

b) Menge $\mathbb{B}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: $x^2 < 10^2$

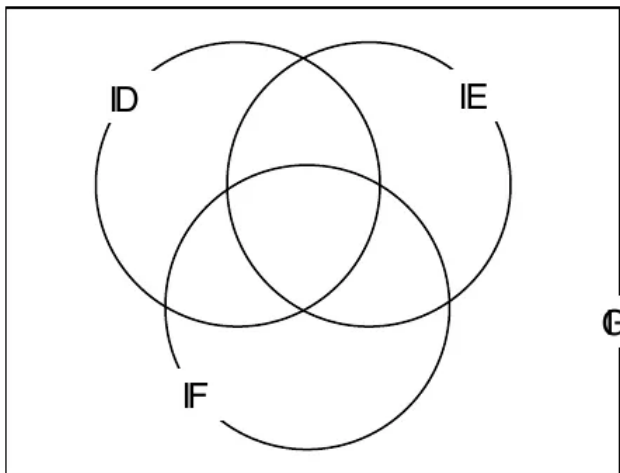
c) Menge $\mathbb{C}$ aller x aus $\mathbb{G}$, für die gilt: x ist positiv und hat genau drei Teiler.

C: _____

7 Menge im Venn-Diagramm

3 Punkte

Schraffiere die Menge $(\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{E}) \cap (\mathbb{F} \cup \mathbb{D})$ im untenstehenden Venn-Diagramm.



8

Prisma mit achteckiger Grundfläche

Der untenstehende Körper kann als senkrechtes Prisma mit achteckiger Grundfläche aufgefasst werden. Die Masszahlen kannst Du der Skizze entnehmen. (Masseinheit = 1 cm)

Hinweis: Der Körper ist nicht massstabsgetreu gezeichnet!

- a) Berechne das Volumen des ganzen Körpers.

V: _____ cm³

- b) Berechne die Länge der Strecke AB.

AB: _____ cm

9 Parallelogramm konstruieren

4 Punkte

Von einem Parallelenviereck ABCD mit der halben Diagonale AM weiss man, dass die Ecke B auf der Geraden g und die Ecke D auf der Geraden h liegt.

Konstruiere das Parallelenviereck ABCD und schreibe einen Konstruktionsbericht!

10 Fährschiffe auf dem Zürichsee

4 Punkte

Zwei Fährschiffe auf dem Zürichsee verkehren zwischen Meilen und Horgen. Schiff A fährt mit einer Geschwindigkeit von $0.2 \frac{\text{km}}{\text{min}}$, Schiff B mit $0.25 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Die Schiffe fahren gleichzeitig los: Schiff A von Horgen Richtung Meilen, Schiff B umgekehrt, von Meilen Richtung Horgen. Die Schiffe erreichen die gegenüberliegende 2.7 km entfernte Seeseite und fahren dann wieder zurück.

Wie weit von Meilen entfernt kreuzen sich die Schiffe bei der Rückfahrt, wenn für beide Schiffe der Zwischenhalt genau gleich lang war?

Distanz von Meilen: _____ m

Lösungen

Gymiprüfung 2008 Mathematik (3. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gleichung und Bruchterm

a) **Ergebnis:** $x = \frac{135}{2}$

Multipliziere mit dem Hauptnenner 75:

- $10 \cdot (3 - 5x) - 18 \cdot (5 - 3x) + 15 = 225$
- $30 - 50x - 90 + 54x + 15 = 225$
- $4x - 45 = 225$
- $4x = 270 \Rightarrow x = \frac{135}{2}$, also $\mathbb{L} = \left\{ \frac{135}{2} \right\}$

b) **Ergebnis:** $\frac{12a+b}{2ab}$

Zuerst die Division (Punkt vor Strich), dann die Addition.

- Faktorisieren: $a^2 + ab = a(a + b)$ und $2x - 8y = 2(x - 4y)$
- Dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren: $\frac{x-4y}{a(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2(x-4y)} = \frac{1}{2a}$
- Addieren mit Hauptnenner $2ab$: $\frac{1}{2a} + \frac{6}{b} = \frac{b}{2ab} + \frac{12a}{2ab} = \frac{12a+b}{2ab}$

2 Ferienlager-Teilnehmende

3 Punkte

Ergebnis: 50 Personen

Sei n die Anzahl Teilnehmende. Knaben: $0.4n$, Mädchen: $0.6n$.

- Mindestens 16 sind 85% der Knaben und 60% der Mädchen.
- $0.85 \cdot 0.4n + 0.6 \cdot 0.6n = 0.34n + 0.36n = 0.7n$
- $0.7n = 35 \Rightarrow n = 50$

3 Dreieck und Kreissegment

a) **Ergebnis:** $x = \frac{16}{5} \text{ cm} = 3.2 \text{ cm}$

- Rechteck: $12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$, davon $\frac{1}{9}$: 8 cm^2
- Rechtwinkliges Dreieck: $\frac{5 \cdot x}{2} = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** 61.418 cm^2 (mit $\pi \approx \frac{22}{7}$: 61.461 cm^2)

Schraffierte Fläche = Kreissektor minus Dreieck M + Sehnenendpunkte.

- Sektor: $\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3} \approx 104.720 \text{ cm}^2$
- Das Dreieck ist gleichschenkelig mit Spitzenwinkel 120° . Die Höhe von M auf die Sehne halbiert es in zwei Halbdreiecke (30° - 60° - 90°): Höhe $= \frac{r}{2} = 5 \text{ cm}$, halbe Sehne $= \frac{r}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$
- Dreieck: $5\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3} \approx 43.301 \text{ cm}^2$
- Teilfläche: $104.720 - 43.301 \approx 61.418 \text{ cm}^2$

4 Mitgliederbeitrag eines Vereins

3 Punkte

Ergebnis: 108 Fr.

Sei x der aktuelle Beitrag in Fr. Neu: $450 + \frac{1}{3} \cdot 450 = 600$ Mitglieder zahlen je $x - 25$.

- $600 \cdot (x - 25) = 450x + 1200$
- $600x - 15000 = 450x + 1200$
- $150x = 16200 \Rightarrow x = 108$

5 Drei Zahlen mit kgV 1512

4 Punkte

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{27, 54, 108, 189, 216, 378, 756, 1512\}$

Zerlege alles in Primfaktoren:

- $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$
- Der Faktor $3^3 = 27$ fehlt in 168 und 126, also muss die dritte Zahl 27 enthalten.
- Zusätzlich darf sie nur Teiler von $2^3 \cdot 7 = 56$ enthalten: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56.
- Mal 27: 27, 54, 108, 189, 216, 378, 756, 1512

6 Mengen aufzählend notieren

a) **Ergebnis:** $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$

- $\sqrt{x}$ gibt es nur für $x \geq 0$.
- $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25$
- Also $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 24\}$

b) **Ergebnis:** $\mathbb{B} = \{(-9), (-8), (-7), \dots, 9\}$

- $x^2 < 100$ gilt für alle x mit $-10 < x < 10$ (auch negative Zahlen, denn das Quadrat ist positiv).
- Also $\mathbb{B} = \{(-9), (-8), \dots, 8, 9\}$

c) **Ergebnis:** $\mathbb{C} = \{4, 9, 25, 49\}$

- Genau drei Teiler haben nur Quadrate von Primzahlen: p^2 hat die Teiler $1, p, p^2$.
- Bis 50: $2^2 = 4, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49$

7 Menge im Venn-Diagramm

3 Punkte

Ergebnis: Schraffiert ist der Teil von $\mathbb{F}$, der weder in $\mathbb{D}$ noch in $\mathbb{E}$ liegt.

- $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{E}$: alles ausserhalb von $\mathbb{D}$ und ausserhalb von $\mathbb{E}$.
- Davon die Schnittmenge mit $\mathbb{F} \cup \mathbb{D}$: Da nichts davon in $\mathbb{D}$ liegt, bleibt nur der Teil in $\mathbb{F}$.
- Ergebnis: nur $\mathbb{F}$ allein (ohne die Überschneidungen mit $\mathbb{D}$ und $\mathbb{E}$).

8 Prisma mit achteckiger Grundfläche

a) **Ergebnis:** $V = 840 \text{ cm}^3$

Die Grundfläche ist die vordere Achteckfläche, die Prismenhöhe ist 6.

- Unten: Rechteck $20 \cdot 3 = 60$
- Darüber ein Trapez: unten $20 - 2 - 2 = 16$, oben 4. Jede schräge Seite überbrückt waagrecht $\frac{16-4}{2} = 6$.
- Trapezhöhe mit Pythagoras: $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
- Trapez: $\frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80$, Grundfläche $60 + 80 = 140 \text{ cm}^2$
- $V = 140 \cdot 6 = 840 \text{ cm}^3$

b) **Ergebnis:** $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$

A

und B liegen in einem Quader mit den Kanten 2 (nach rechts), 3 (nach unten) und 6 (nach hinten). AB ist dessen Raumdiagonale:

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

9 Parallelogramm konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: 1. A an M spiegeln $\rightarrow C$ 2. h an M spiegeln $\rightarrow h'$ 3. $h' \cap g = \{B\}$ 4. Gerade $BM \cap h = \{D\}$

Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. M ist also das Symmetriezentrum:
Spiegelt man an M , geht A in C und D in B über.

1. Spiegle A an M : Du erhältst C .
2. Da D auf h liegt, liegt sein Spiegelbild B auf der an M gespiegelten Geraden h' . Spiegle also h an $M \rightarrow h'$.
3. B liegt auf g und auf h' : B ist der Schnittpunkt von h' und g .
4. Zeichne die Gerade BM . Ihr Schnittpunkt mit h ist D .
5. Verbinde A, B, C, D zum Parallelogramm.

10 Fährschiffe auf dem Zürichsee

4 Punkte

Ergebnis: 900 m von Meilen entfernt

- Erste Überquerung: $t_A = \frac{2.7}{0.2} = 13.5 \text{ min}$, $t_B = \frac{2.7}{0.25} = 10.8 \text{ min}$
- Weil der Halt gleich lang ist, startet B seine Rückfahrt $13.5 - 10.8 = 2.7 \text{ min}$ vor A.
- In dieser Zeit fährt B $2.7 \cdot 0.25 = 0.675 \text{ km}$ von Horgen weg. Bis Meilen fehlen noch $2.7 - 0.675 = 2.025 \text{ km}$.
- Beide fahren nun aufeinander zu: $\frac{2.025}{0.2+0.25} = 4.5 \text{ min}$
- A fährt in dieser Zeit von Meilen weg: $4.5 \cdot 0.2 = 0.9 \text{ km} = 900 \text{ m}$

Andere Idee: Ohne Halt legen beide zusammen $3 \cdot 2.7 = 8.1 \text{ km}$ zurück: $0.45t = 8.1 \Rightarrow t = 18 \text{ min}$. A fährt $18 \cdot 0.2 = 3.6 \text{ km}$, also nach einer Überfahrt von 2.7 km noch 0.9 km.