

Mathematik · 2. Sek

90 Minuten · 11 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (nur übliche Sekundarschulrechner)
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Terme vereinfachen und einsetzen

4 Punkte

a) Vereinfache den Term so weit wie möglich:

$$\frac{2}{3} + \frac{3x}{2} - \frac{6}{5} \left(\frac{20x}{9} - \frac{2}{3} \right)$$

Das Ergebnis muss aus einem gekürzten Bruch bestehen.

Term: _____

b) Gegeben ist der Term $\frac{12a-3b}{8}$.

Setze in diesem Term 0.305 für a und $\sqrt{0.8^2 + 1}$ für b ein, und berechne den Wert des Terms. Bestimme nun, mit welchem Faktor man das Resultat multiplizieren muss, um das Produkt 1 zu erhalten. Runde diesen Faktor auf eine ganze Zahl.

Faktor: _____

2 Ungleichung in ganzen Zahlen

3 Punkte

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$. Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an.

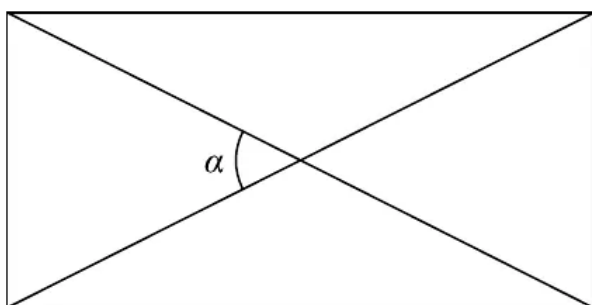
$$7 + 4(x - 3) < (-14x) - 11(1 - 2x) - (x + 1) + 22$$

3 Diagonalen im Rechteck

2 Punkte

In einem Rechteck teilt jede Diagonale die rechten Winkel in zwei Teilwinkel, welche jeweils im Verhältnis 11 : 34 stehen (siehe nicht massstabstreue Figur).

Berechne den Winkel α .

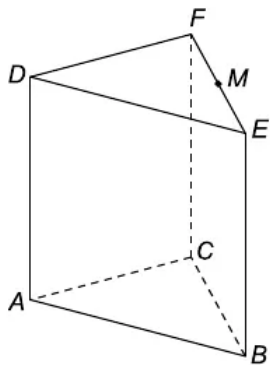


α : _____ °

4 Dreiseitiges Prisma

4 Punkte

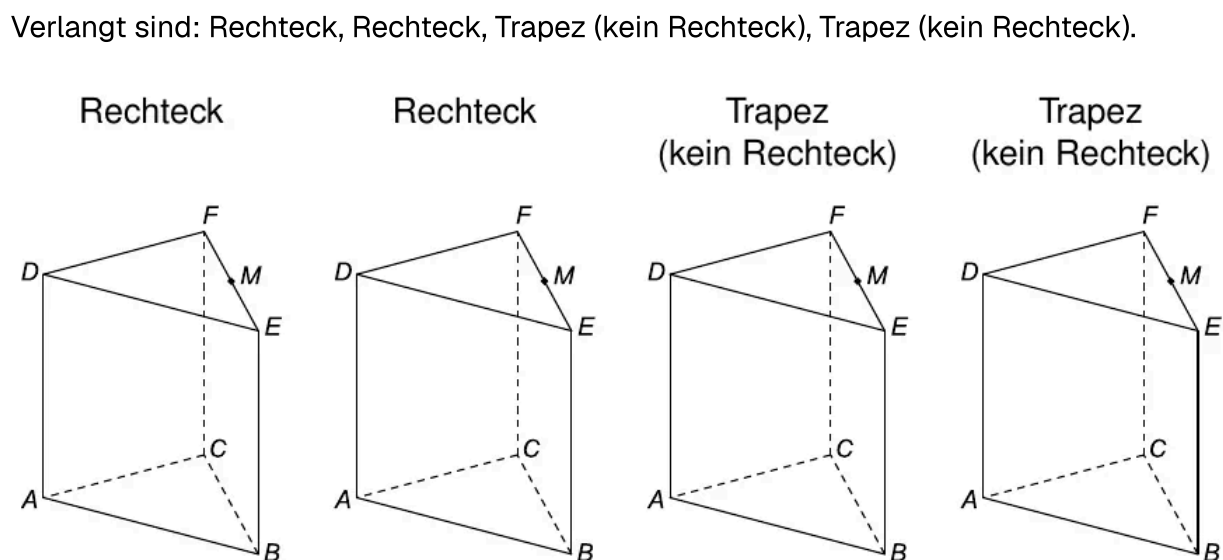
In einem geraden dreiseitigen Prisma misst die Höhe 7 cm. Die Kanten DE und DF messen je 5 cm. M ist Mittelpunkt der Kante EF . Die Strecken EM und FM sind je 3 cm lang (siehe nicht massstabstreue Figur).



- a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AM}$. (Genauigkeit: 2 Dezimalen)

$\overline{AM}$: _____ cm

- b) Durch das Prisma wird ein ebener Schnitt durch den Punkt M und mindestens zwei weitere Kantenmittelpunkte geführt. So können verschiedene Schnittfiguren entstehen, zum Beispiel Dreiecke oder Rechtecke oder Trapeze etc. Zeichne vier *verschiedene* Schnittfiguren, und zwar in jedes Schrägbild unten eine verlangte Figur. (Hinweis: Messen erlaubt)



5 Triathlon: Zeit pro Kilometer

3 Punkte

Ein Sportler hat soeben auf seinem Fahrrad 180 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $32 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückgelegt und sich in 4.5 Minuten für den bevorstehenden Marathon von 42.195 km umgezogen. Bestimme, wie viel Zeit er durchschnittlich pro Kilometer auf dieser zweiten Etappe brauchen darf, wenn er seine persönliche Gesamtbestzeit von 9 h 40 min um $\frac{1}{10}$ unterbieten will. Runde dein Resultat auf die nächste Sekunde.

Zeit pro km: _____ s

6 Plattenbelag im Schwimmbecken

4 Punkte

Ein Schwimmbecken ist 1620 cm lang, 648 cm breit und 270 cm tief. Der Boden und die Wände des Schwimmbeckens sollen mit gleich grossen quadratischen Platten belegt werden.

- a) Die quadratischen Platten sollen möglichst gross sein. Bestimme die Seitenlänge der Platten.

Seitenlänge: _____ cm

- b) Teilaufgabe b) ist von Teilaufgabe a) unabhängig.

Die Seitenlänge der Platten beträgt nun 9 cm. Die äusserste Plattenreihe jeder Fläche ist mit roten Platten zu belegen. Berechne, wie viele rote Platten benötigt werden.

Anzahl rote Platten: _____

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Figur). Eine Ameise läuft von der Ecke B zur Ecke D . Sie läuft nicht auf direktem Weg, sondern in drei Etappen bzw. entlang drei Teilstrecken:

- Auf der ersten Teilstrecke von Ecke B aus hat sie zu jedem Zeitpunkt von AB den gleichen Abstand wie von BC . In dieser Richtung läuft sie so weit, bis sie genau gleich weit von Ecke B und Ecke D entfernt ist.
- Jetzt biegt sie nach links ab. Von dieser zweiten Teilstrecke ist nur bekannt, dass sie 3 cm lang ist.
- Nun biegt die Ameise rechtwinklig ab und gelangt auf der dritten Teilstrecke auf direktem Weg genau zur Ecke D .

(Grobe Skizze des Wegs: von B schräg nach oben, dann 3 cm nach links oben, dann mit rechtem Winkel zu D .)

Konstruiere den genauen Streckenverlauf von B nach D in unten stehende Figur. Schreibe dazu auch einen vollständigen Konstruktionsbericht.

8**Zucker in Cola**

3 Punkte

Ein Liter Cola wiegt 1 kg. Davon sind $\frac{5}{46}$ Zucker.

- a) Ein Würfelzucker wiegt 3 g. Berechne, wie viele Würfelzucker der in 5 dl Cola enthaltenen Zuckermenge entsprechen. Runde das Ergebnis auf ganze Würfelzucker.

Anzahl Würfelzucker: _____

- b) Durch eine chemische Methode lässt sich $\frac{1}{333}$ des Zuckers aus Cola herausholen. Bestimme, wie viele Liter Cola nötig sind, um 431 Milligramm Zucker herauszuholen. (Genauigkeit: 1 Dezimale)

Menge Cola: _____ l

9 Mengen bestimmen

2 Punkte

Bestimme alle Mengen $\mathbb{M}$, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\{b, c\} \cup \mathbb{M} = \{a, b, c, d, e\}$$

und die Menge $\{b, c\}$ ist nicht Teilmenge von $\mathbb{M}$.

10 Wasser im Quaderbehälter

3 Punkte

In einem quaderförmigen, 15 cm hohen Behälter mit einer Grundfläche von 300 cm^2 steht 6 cm hoch Wasser.

- a) Berechne, wie viele Liter nachgefüllt werden müssten, damit dieser Behälter voll würde.

Nachfüllmenge: _____ l

- b) In den teilweise gefüllten Behälter wird ein Quader so hinein gestellt, dass er mit seiner Grundfläche von 100 cm^2 auf dem Boden des Behälters steht (siehe nicht massstabstreue Figur). Dadurch steigt der Wasserspiegel genau auf die Höhe des hineingestellten Quaders an. Bestimme die Höhe dieses Quaders.

Höhe des Quaders: _____ cm

11 Winkel und Zeiger einer Uhr

- a) Eine Armbanduhr zeigt 10 Minuten nach 6 Uhr (siehe Figur).

Berechne den stumpfen Winkel zwischen dem kleinen und dem grossen Zeiger.

Winkel: _____ °

- b) Der Durchmesser des kreisförmigen Zifferblatts misst 2.88 cm. Der Stundenzeiger ist halb so lang wie der Minutenzeiger. Das 1.5-fache des arithmetischen Mittels (Durchschnitts) der beiden Zeigerlängen ist gleich lang wie der halbe Durchmesser.

Berechne die Länge der Zeiger.

Stundenzeiger: _____ cm

Minutenzeiger: _____ cm

Lösungen

Gymiprüfung 2009 Mathematik (2. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen und einsetzen

4 Punkte

a) Ergebnis: $\frac{44-35x}{30}$

1. Klammer auflösen: $\frac{6}{5} \cdot \frac{20x}{9} = \frac{8x}{3}$ und $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$. Achtung: Das Minus vor der Klammer dreht beide Vorzeichen.

$$\frac{2}{3} + \frac{3x}{2} - \frac{8x}{3} + \frac{4}{5}$$

2. Auf den Hauptnenner 30 bringen:

$$\frac{20 + 45x - 80x + 24}{30}$$

3. Zusammenfassen:

$$\frac{44 - 35x}{30}$$

Der Bruch lässt sich nicht weiter kürzen.

b) Ergebnis: Wert des Terms: -0.02273 ; gesuchter Faktor: -44

1. $b = \sqrt{0.8^2 + 1} = \sqrt{1.64} \approx 1.28062$

2. Einsetzen: $\frac{12 \cdot 0.305 - 3 \cdot 1.28062}{8} = \frac{3.66 - 3.84187}{8} \approx -0.02273$

3. Der Faktor, der das Produkt 1 ergibt, ist der Kehrwert: $\frac{1}{-0.02273} \approx -43.99$

4. Gerundet: -44 (das Minus nicht vergessen).

2 Ungleichung in ganzen Zahlen

3 Punkte

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{-4, -3, -2, \dots\}$

1. Klammern auflösen:

$$7 + 4x - 12 < -14x - 11 + 22x - x - 1 + 22$$

2. Beide Seiten zusammenfassen:

$$4x - 5 < 7x + 10$$

3. $4x$

und 10 auf die andere Seite bringen:

$$-15 < 3x \Rightarrow -5 < x$$

4. Gesucht sind ganze Zahlen grösser als -5 (-5 selbst gehört nicht dazu):

$$\mathbb{L} = \{-4, -3, -2, \dots\}$$

3 Diagonalen im Rechteck

2 Punkte

Ergebnis: Teilwinkel: 22° und 68° ; Schnittwinkel: 44° oder 136°

1. $11 + 34 = 45$ Teile ergeben 90° , also ist 1 Teil $= 2^\circ$.
2. Teilwinkel: $11 \cdot 2^\circ = 22^\circ$ und $34 \cdot 2^\circ = 68^\circ$.
3. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig und sind gleich lang. Darum ist das Dreieck aus dem Schnittpunkt und der linken (kurzen) Rechteckseite gleichschenkelig. Seine Basiswinkel an der kurzen Seite sind je 68° .
4. $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$
5. Der Nebenwinkel ist $180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$. Der Schnittwinkel der Diagonalen ist also 44° bzw. 136° ; in der Figur ist $\alpha = 44^\circ$.

4 Dreiseitiges Prisma

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\overline{AM} = \sqrt{65} \text{ cm} \approx 8.06 \text{ cm}$

1. Das Dreieck DEF ist gleichschenkelig ($DE = DF$). Darum steht DM senkrecht auf EF . Pythagoras im Dreieck DMF :

$$\overline{DM} = \sqrt{5^2 - 3^2} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

2. Die Kante AD (Höhe 7 cm) steht senkrecht auf der Deckfläche, also auch auf DM . Pythagoras im Dreieck ADM :

$$\overline{AM} = \sqrt{7^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{65} \text{ cm} \approx 8.06 \text{ cm}$$

- b) **Ergebnis: Zwei verschiedene Rechtecke und zwei verschiedene Trapeze (keine Rechtecke), siehe Lösungsfiguren.**

Markiere zuerst alle Kantenmittelpunkte. Die Schnittebene muss durch M und mindestens zwei weitere dieser Mittelpunkte gehen.

- **Rechtecke:** Die Ebene ist senkrecht zur Deckfläche, also parallel zu den Seitenkanten. Beispiel: M , Mittelpunkt von DF und die beiden Punkte direkt darunter auf der Grundfläche (Mittelpunkte von BC und AC). Ein zweites Rechteck: durch M , den Mittelpunkt von DE und die Punkte darunter. Auch ein Schnitt durch die Kante AD und M ergibt ein Rechteck.
- **Trapeze:** Die Ebene ist schräg. Beispiel: M , Mittelpunkt von DF (oben) sowie die Mittelpunkte der Seitenkanten AD und BE . Die obere Seite ist parallel zur unteren, aber nur halb so lang, also ein Trapez, das kein Rechteck ist.

Die offiziellen Lösungen zeigen mehrere Möglichkeiten (dick eingezeichnet).

5 Triathlon: Zeit pro Kilometer

3 Punkte

Ergebnis: 4 min 16 s = 256 s pro km

1. Velofahrt: $t_1 = \frac{180}{32} \text{ h} = 5.625 \text{ h} = 5 \text{ h } 37.5 \text{ min}$
2. Mit Umziehen: $5 \text{ h } 37.5 \text{ min} + 4.5 \text{ min} = 5 \text{ h } 42 \text{ min} = 5.7 \text{ h}$
3. Bestzeit um $\frac{1}{10}$ unterbieten heisst: $\frac{9}{10}$ von $9 \text{ h } 40 \text{ min} = 8 \text{ h } 42 \text{ min} = 8.7 \text{ h}$
4. Zeit für den Marathon: $8.7 \text{ h} - 5.7 \text{ h} = 3 \text{ h} = 180 \text{ min}$
5. Pro Kilometer: $180 \text{ min} : 42.195 \approx 4.2659 \text{ min}$
6. $0.2659 \text{ min} \cdot 60 \approx 15.95 \text{ s}$, gerundet 16 s. Ergebnis: **4 min 16 s = 256 s.**

6 Plattenbelag im Schwimmbecken

4 Punkte

a) Ergebnis: 54 cm

Die Seitenlänge muss in alle drei Masse ohne Rest passen und möglichst gross sein: gesucht ist der ggT.

- $1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$
- $648 = 2^3 \cdot 3^4$
- $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Gemeinsame Faktoren mit der kleinsten Hochzahl: $\text{ggT} = 2 \cdot 3^3 = 54$. Die Platten sind **54 cm** lang.

b) Ergebnis: 1732 Platten

1. Plattenanzahl pro Kante: Länge $1620 : 9 = 180$, Breite $648 : 9 = 72$, Tiefe $270 : 9 = 30$.
2. Bei einer Fläche mit $m \times n$ Platten hat der Rand $2m + 2n - 4$ Platten (die 4 Ecken nicht doppelt zählen).
3. Boden (180×72): $360 + 144 - 4 = 500$
4. Zwei lange Wände (180×30): $2 \cdot (360 + 60 - 4) = 2 \cdot 416 = 832$
5. Zwei kurze Wände (72×30): $2 \cdot (144 + 60 - 4) = 2 \cdot 200 = 400$
6. Total: $500 + 832 + 400 = 1732$ rote Platten.

Ergebnis: w = Winkelhalbierende bei B (zwischen AB und BC); m = Mittelsenkrechte von BD ; $M_1 = w \cap m$; $P = k_1(M_1; 3 \text{ cm}) \cap k_2$, wobei k_2 = Thaleskreis über M_1D .

Weg: $B \rightarrow M_1 \rightarrow P \rightarrow D$.

1. Gleicher Abstand von AB und BC : Die Ameise läuft auf der **Winkelhalbierenden** w des rechten Winkels bei B .
2. Gleich weit von B und D : Solche Punkte liegen auf der **Mittelsenkrechten** m von BD . Der Schnittpunkt $M_1 = w \cap m$ ist das Ende der ersten Teilstrecke.
3. Die zweite Teilstrecke ist 3 cm lang: Ihr Endpunkt P liegt auf dem **Kreis** k_1 um M_1 mit Radius 3 cm.
4. Bei P ist ein rechter Winkel zwischen M_1P und PD : P liegt auf dem **Thaleskreis** k_2 über M_1D (Mittelpunkt M_2 = Mitte von M_1D).
5. $P = k_1 \cap k_2$. Von den zwei Schnittpunkten nimmst du den, bei dem die Ameise nach **links** abbiegt.
6. Weg einzeichnen: $B \rightarrow M_1 \rightarrow P \rightarrow D$.

Konstruktionsbericht: w = Winkelhalbierende bei B ; m = Mittelsenkrechte von BD ; $M_1 = w \cap m$; $k_1(M_1; 3 \text{ cm})$; k_2 = Thaleskreis über M_1D ; $P = k_1 \cap k_2$; Streckenzug BM_1PD .

8 Zucker in Cola

3 Punkte

a) Ergebnis: 18 Würfelzucker

1. 5 dl Cola wiegen 500 g.
2. Zucker darin: $\frac{5}{46} \cdot 500 \text{ g} \approx 54.35 \text{ g}$
3. Würfelzucker: $54.35 \text{ g} : 3 \text{ g} \approx 18.1$, gerundet **18 Würfelzucker**.

b) Ergebnis: 1.3 Liter

Rechne rückwärts.

1. 431 mg = 0.431 g sind $\frac{1}{333}$ des Zuckers. Gesamter Zucker: $0.431 \text{ g} \cdot 333 = 143.523 \text{ g}$
2. Dieser Zucker ist $\frac{5}{46}$ der Cola: $143.523 \text{ g} : \frac{5}{46} = 143.523 \cdot \frac{46}{5} \text{ g} \approx 1320 \text{ g}$
3. 1 kg Cola = 1 Liter, also $1320 \text{ g} \approx$ **1.3 Liter**.

9 Mengen bestimmen

2 Punkte

Ergebnis: $\{a, d, e\}; \{a, d, e, b\}; \{a, d, e, c\}$

1. Die Vereinigung soll $\{a, b, c, d, e\}$ ergeben. a, d und e kommen nicht aus $\{b, c\}$, also müssen sie in $\mathbb{M}$ sein.
 2. $\mathbb{M}$ darf keine anderen Elemente haben als a, b, c, d, e . b und c dürfen also dazukommen.
 3. $\{b, c\}$ darf aber nicht Teilmenge von $\mathbb{M}$ sein: b und c dürfen nicht **beide** in $\mathbb{M}$ liegen.
 4. Es bleiben drei Mengen: $\{a, d, e\}, \{a, d, e, b\}, \{a, d, e, c\}$.
-

10 Wasser im Quaderbehälter

3 Punkte

a) Ergebnis: 2.7 Liter

1. Es fehlen noch $15 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ Höhe.
2. Fehlendes Volumen: $300 \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ cm} = 2700 \text{ cm}^3$
3. $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ Liter}$, also **2.7 Liter**.

b) Ergebnis: 9 cm

1. Wassermenge: $V = 300 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 1800 \text{ cm}^3$. Sie bleibt gleich.
 2. Das Wasser reicht genau bis zur Oberkante des Quaders. Ihm steht nur noch die Fläche neben dem Quader zur Verfügung: $300 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$.
 3. Wasserhöhe = Quaderhöhe: $h = 1800 : 200 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$.
-

11 Winkel und Zeiger einer Uhr**a) Ergebnis: 125°**

1. Zwischen zwei Stundenmarken liegen $360^\circ : 12 = 30^\circ$.
2. Der grosse Zeiger steht auf der 2, der kleine wäre um 6 Uhr genau auf der 6: dazwischen liegen 4 Stundenabschnitte, also $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.
3. Der kleine Zeiger wandert in 60 min um 30° , also pro Minute um 0.5° . In 10 Minuten: $10 \cdot 0.5^\circ = 5^\circ$ weiter weg vom grossen Zeiger.
4. Winkel: $120^\circ + 5^\circ = 125^\circ$.

b) Ergebnis: Stundenzeiger = 0.64 cm; Minutenzeiger = 1.28 cm

1. Halber Durchmesser: $2.88 : 2 = 1.44 \text{ cm}$.

2. Das 1.5-fache des Mittels ist 1.44 cm, also Mittel = $\frac{1.44}{1.5} = 0.96$ cm.

3. Stundenzeiger x , Minutenzeiger $2x$:

$$\frac{x + 2x}{2} = 0.96 \quad \Rightarrow \quad 3x = 1.92 \quad \Rightarrow \quad x = 0.64$$

4. Stundenzeiger **0.64 cm**, Minutenzeiger $2 \cdot 0.64 = \mathbf{1.28 \text{ cm}}$.