

Mathematik · 3. Sek

90 Minuten · 11 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Bruchterm und Termwert

4 Punkte

a) Vereinfache den Term so weit wie möglich:

$$\frac{13ab + 13a}{(-3ab^2) + a^2b^2} : \frac{39 + 39b}{a^2 - 3a}$$

Das Ergebnis muss aus einem gekürzten Bruch bestehen.

Term: _____

b) Gegeben ist der Term $\frac{12a-3b}{8}$.

Setze in diesem Term 0.305 für a und $\sqrt{0.8^2 + 1}$ für b ein, und berechne den Wert des Terms. Bestimme nun, mit welchem Faktor man das Resultat multiplizieren muss, um das Produkt 1 zu erhalten. Runde diesen Faktor auf eine ganze Zahl.

Wert des Terms: _____

Faktor: _____



2 Ungleichung mit Brüchen

3 Punkte

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$. Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an.

$$\frac{3x}{14} + 2 \geq \frac{2x + 5}{28} - \frac{9x - 7}{42}$$

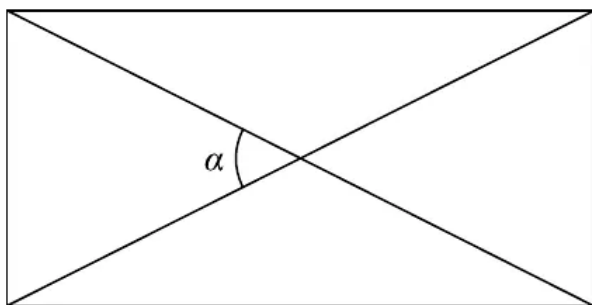
$\mathbb{L}$: _____

3 Diagonalenwinkel im Rechteck

2 Punkte

In einem Rechteck teilt jede Diagonale die rechten Winkel in zwei Teilwinkel, welche jeweils im Verhältnis 11 : 34 stehen (siehe nicht massstabstreue Figur).

Berechne den Winkel α .

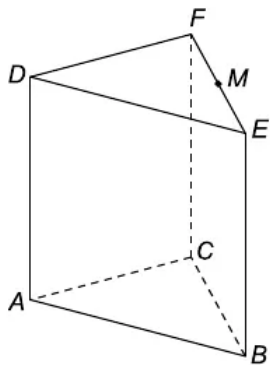


α : _____ °

4 Dreiseitiges Prisma

4 Punkte

In einem geraden dreiseitigen Prisma misst die Höhe 7 cm. Die Kanten DE und DF messen je 5 cm. M ist Mittelpunkt der Kante EF . Die Strecken EM und FM sind je 3 cm lang (siehe nicht massstabstreue Figur).

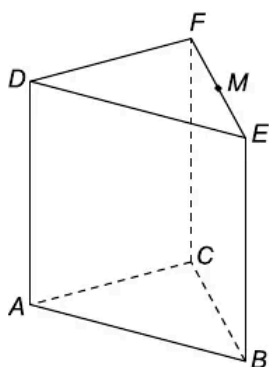


- a) Berechne die Länge der Strecke AM . (Genauigkeit: 2 Dezimalen)

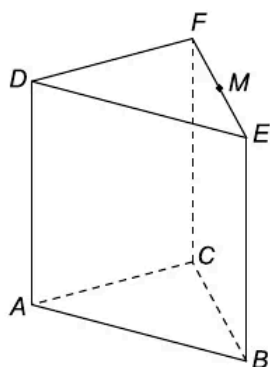
AM : _____ cm

- b) Durch das Prisma wird ein ebener Schnitt durch den Punkt M und mindestens zwei weitere Kantenmittelpunkte geführt. So können verschiedene Schnittfiguren entstehen, zum Beispiel Dreiecke oder Rechtecke oder Trapeze etc. Zeichne vier *verschiedene* Schnittfiguren, und zwar in jedes Schrägbild unten eine verlangte Figur. (Hinweis: Messen erlaubt)

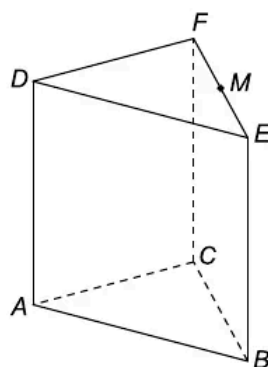
Rechteck



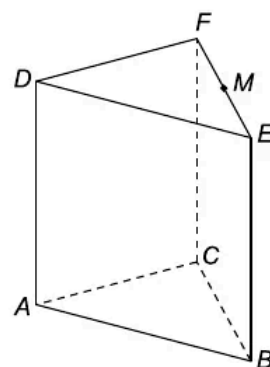
Rechteck



Trapez
(kein Rechteck)



Trapez
(kein Rechteck)



5 Triathlon-Zeit pro Kilometer

3 Punkte

Ein Sportler hat soeben auf seinem Fahrrad 180 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $32 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückgelegt und sich in 4.5 Minuten für den bevorstehenden Marathon von 42.195 km umgezogen. Bestimme, wie viel Zeit er durchschnittlich pro Kilometer auf dieser zweiten Etappe brauchen darf, wenn er seine persönliche Gesamtbestzeit von 9 h 40 min um $\frac{1}{10}$ unterbieten will. Runde dein Resultat auf die nächste Sekunde.

Zeit pro km: _____ s

6 Schwimmbecken mit Platten

4 Punkte

Ein Schwimmbecken ist 1620 cm lang, 648 cm breit und 270 cm tief. Der Boden und die Wände des Schwimmbeckens sollen mit gleich grossen quadratischen Platten belegt werden.

- a) Die quadratischen Platten sollen möglichst gross sein. Bestimme die Seitenlänge der Platten.

Seitenlänge: _____ cm

- b) Teilaufgabe b) ist von Teilaufgabe a) unabhängig.

Die Seitenlänge der Platten beträgt nun 9 cm. Die äusserste Plattenreihe jeder Fläche ist mit roten Platten zu belegen. Berechne, wie viele rote Platten benötigt werden.

Rote Platten: _____ Platten



Weg einer Ameise konstruieren

4 Punkte

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Figur). Eine Ameise läuft von der Ecke B zur Ecke D . Sie läuft nicht auf direktem Weg, sondern in drei Etappen bzw. entlang drei Teilstrecken:

- Auf der ersten Teilstrecke von Ecke B aus hat sie zu jedem Zeitpunkt von AB den gleichen Abstand wie von BC . In dieser Richtung läuft sie so weit, bis sie genau gleich weit von Ecke B und Ecke D entfernt ist.
- Jetzt biegt sie nach links ab. Von dieser zweiten Teilstrecke ist nur bekannt, dass sie 3 cm lang ist.
- Nun biegt die Ameise rechtwinklig ab und gelangt auf der dritten Teilstrecke auf direktem Weg genau zur Ecke D .

Konstruiere den genauen Streckenverlauf von B nach D in unten stehende Figur. Schreibe dazu auch einen vollständigen Konstruktionsbericht.

8**Zucker in Cola**

3 Punkte

Ein Liter Cola wiegt 1 kg. Wasser, Natrium, Kalium, Kalzium, Magnesium und Phosphor machen 89% des Gewichts aus. Der Rest ist Zucker.

- a) Ein Würfelzucker wiegt 3 g. Berechne, wie viele Würfelzucker der in 5 dl Cola enthaltenen Zuckermenge entsprechen. Runde das Ergebnis auf ganze Würfelzucker.

Anzahl Würfelzucker: _____ Würfelzucker

- b) Durch eine chemische Methode lässt sich 0.3% des Zuckers aus Cola herausholen. Bestimme, wie viele Liter Cola nötig sind, um 431 Milligramm Zucker herauszuholen. (Genauigkeit: 1 Dezimale)

Cola: _____ Liter

9 Mengen bestimmen

2 Punkte

Bestimme alle Mengen $\mathbb{M}$, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\{b, c\} \cup \mathbb{M} = \{a, b, c, d, e\}$$

und die Menge $\{b, c\}$ ist nicht Teilmenge von $\mathbb{M}$.

10 Wasser im Zylinder

3 Punkte

In einem zylinderförmigen, 15 cm hohen Behälter mit einer Grundfläche von 300 cm^2 steht 6 cm hoch Wasser.

- a) Berechne, wie viele Liter nachgefüllt werden müssten, damit dieser Behälter voll würde.

Nachfüllen: _____ Liter

- b) In den teilweise gefüllten Behälter wird ein Zylinder so hinein gestellt, dass er mit seiner Grundfläche von 100 cm^2 auf dem Boden des Behälters steht (siehe nicht massstabstreue Figur). Dadurch steigt der Wasserspiegel genau auf die Höhe des hineingestellten Zylinders an. Bestimme die Höhe dieses Zylinders.

Höhe: _____ cm

11

Armbrustschiessen mit Gleichung

4 Punkte

Bei einem Jugendarmbrustschiessen ist die Anzahl der teilnehmenden Knaben um 135 grösser als die der Mädchen. $\frac{4}{7}$ der Gesamtpunktzahl der Knaben ist gleich gross wie $\frac{3}{5}$ der Gesamtpunktzahl der Mädchen. Der Punktedurchschnitt aller Mädchen ist 70, jener der Knaben 63.

Berechne die Gesamtteilnehmerzahl mit Hilfe einer Gleichung.

Gesamtteilnehmerzahl: _____ Teilnehmer

Lösungen

Gymiprüfung 2009 Mathematik (3. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Bruchterm und Termwert

4 Punkte

a) Ergebnis: $\frac{a}{3b^2}$

- Faktorisiere alle Zähler und Nenner: $13ab + 13a = 13a(b + 1)$, $-3ab^2 + a^2b^2 = ab^2(a - 3)$, $39 + 39b = 39(1 + b)$, $a^2 - 3a = a(a - 3)$.
- Dividieren heisst: mit dem Kehrwert multiplizieren:

$$\frac{13a(b + 1) \cdot a(a - 3)}{ab^2(a - 3) \cdot 39(1 + b)}$$

- Kürze $(b + 1)$, $(a - 3)$ und ein a : $\frac{13a}{39b^2}$.
- Kürze mit 13: $\frac{a}{3b^2}$.

b) Ergebnis: Wert des Terms: -0.02273 ; gesuchter Faktor: -44

- $b = \sqrt{0.64 + 1} = \sqrt{1.64} \approx 1.28062$
- Zähler: $12 \cdot 0.305 - 3 \cdot 1.28062 = 3.66 - 3.84187 = -0.18187$
- Wert: $-0.18187 : 8 \approx -0.02273$
- Der gesuchte Faktor ist der Kehrwert: $1 : (-0.02273) \approx -43.99$, gerundet -44 .

2 Ungleichung mit Brüchen

3 Punkte

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{-4, -3, -2, \dots\}$

- Multipliziere mit dem Hauptnenner 84: $18x + 168 \geq 3(2x + 5) - 2(9x - 7)$
- Klammern auflösen (Minus vor der Klammer beachten!): $18x + 168 \geq 6x + 15 - 18x + 14 = -12x + 29$
- Ordnen: $30x \geq -139$, also $x \geq -\frac{139}{30} \approx -4.63$
- Die kleinste ganze Zahl, die das erfüllt, ist -4 : $\mathbb{L} = \{-4, -3, -2, \dots\}$

3 Diagonalenwinkel im Rechteck

2 Punkte

Ergebnis: Teilwinkel 22° und $68^\circ \Rightarrow$ Schnittwinkel 44° (bzw. 136°)

- 90° werden im Verhältnis 11 : 34 geteilt, total 45 Teile: ein Teil = 2° .
- Teilwinkel: $11 \cdot 2^\circ = 22^\circ$ und $34 \cdot 2^\circ = 68^\circ$.
- Die Diagonalen halbieren sich, deshalb ist das Dreieck mit der linken (kurzen) Rechteckseite gleichschenkelig. Seine Basiswinkel sind die Winkel zwischen Diagonale und kurzer Seite, also je 68° .
- $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$.
- Der andere Winkel zwischen den Diagonalen ist $180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$; da die Figur nicht massstabstreu ist, gilt auch dieser Wert als richtig.

4 Dreiseitiges Prisma

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $AM = \sqrt{65} \text{ cm} \approx 8.06 \text{ cm}$

- Das Dreieck DEF ist gleichschenkelig, darum steht DM senkrecht auf EF .
Pythagoras im Dreieck DMF : $DM = \sqrt{5^2 - 3^2} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$
- AD ist die Höhe des Prismas (7 cm) und steht senkrecht auf DM . Pythagoras im Dreieck ADM : $AM = \sqrt{7^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{65} \text{ cm} \approx 8.06 \text{ cm}$

b) **Ergebnis: Zwei verschiedene Rechtecke und zwei verschiedene Trapeze (keine Rechtecke), siehe Lösungsfiguren.**

Markiere zuerst alle Kantenmittelpunkte. Die Schnittebene geht durch M und mindestens zwei weitere Kantenmittelpunkte.

- **Rechteck 1:** Mitte von DF , M , Mitte von BC , Mitte von AC . Der Schnitt ist senkrecht (parallel zur Kante DE bzw. AB), deshalb entsteht ein Rechteck.
- **Rechteck 2:** Mitte von DE , M , Mitte von BC , Mitte von AB . Ebenfalls ein senkrechter Schnitt (parallel zu DF bzw. AC).
- **Trapez 1:** Mitte von AD , Mitte von DF , M , Mitte von BE . Die Seite in der Deckfläche ist parallel zur Seite durch die Mitten von AD und BE , die anderen Seiten nicht: ein Trapez, kein Rechteck.
- **Trapez 2:** Mitte von AD , Mitte von DE , M , Mitte von CF (analog zu Trapez 1, nur gespiegelt).

Die offizielle Lösung zeigt auch weitere mögliche Schnittfiguren, z. B. Rechtecke durch A , D und M oder Trapeze durch A und M .

5 Triathlon-Zeit pro Kilometer

3 Punkte

Ergebnis: 4 min 16 s = 256 s pro Kilometer

- Velofahrt: $t_1 = \frac{180}{32} \text{ h} = 5.625 \text{ h} = 5 \text{ h } 37.5 \text{ min}$
- Mit Umziehen: $5 \text{ h } 37.5 \text{ min} + 4.5 \text{ min} = 5 \text{ h } 42 \text{ min} = 5.7 \text{ h}$
- Zielzeit: um $\frac{1}{10}$ unterbieten heisst $\frac{9}{10}$ von 9 h 40 min: $\frac{9}{10} \cdot 580 \text{ min} = 522 \text{ min} = 8.7 \text{ h}$
- Für den Marathon bleiben $8.7 \text{ h} - 5.7 \text{ h} = 3 \text{ h} = 180 \text{ min}$
- Pro Kilometer: $180 \text{ min} : 42.195 \approx 4.2659 \text{ min}$
- $0.2659 \text{ min} \cdot 60 \approx 16 \text{ s}$, also $4 \text{ min } 16 \text{ s} = 256 \text{ s}$

6 Schwimmbecken mit Platten

4 Punkte

a) Ergebnis: 54 cm

Die Seitenlänge muss in alle drei Masse aufgehen, und zwar möglichst gross: gesucht ist der ggT.

- $1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$
- $648 = 2^3 \cdot 3^4$
- $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$
- $\text{ggT} = 2 \cdot 3^3 = 54$, also 54 cm.

b) Ergebnis: 1732 Platten

- In Platten gemessen: Länge $1620 : 9 = 180$, Breite $648 : 9 = 72$, Tiefe $270 : 9 = 30$.
- Der Rand eines Rechtecks aus $m \times n$ Platten besteht aus $2m + 2n - 4$ Platten (die 4 Ecken nicht doppelt zählen).
- Boden (180×72): $360 + 144 - 4 = 500$
- 2 Längswände (180×30): $2 \cdot (360 + 60 - 4) = 832$
- 2 Querwände (72×30): $2 \cdot (144 + 60 - 4) = 400$
- Total: $500 + 832 + 400 = 1732$ rote Platten

(Offizielle Rechnung: $6 \cdot 180 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 70 + 4 \cdot 28 = 1732$.)

7 Weg einer Ameise konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: Weg $B \rightarrow M_1 \rightarrow P \rightarrow D$ mit $M_1 = w \cap m$ und $P = k_1(M_1, 3 \text{ cm}) \cap k_2$ (Thaleskreis über $M_1 D$).

Konstruktionsbericht:

1. w = Winkelhalbierende des Winkels bei B (zwischen AB und BC). Auf ihr hat jeder Punkt gleichen Abstand von AB und BC .
2. m = Mittelsenkrechte von BD . Auf ihr ist jeder Punkt gleich weit von B und D entfernt.
3. $M_1 = w \cap m$: Ende der ersten Teilstrecke BM_1 .
4. k_1 = Kreis um M_1 mit Radius 3 cm (Länge der zweiten Teilstrecke).
5. k_2 = Thaleskreis über $M_1 D$ (Mittelpunkt M_2 = Mitte von $M_1 D$). Jeder Punkt darauf sieht M_1 und D unter einem rechten Winkel, also biegt die Ameise dort rechtwinklig ab.
6. $P = k_1 \cap k_2$: der Schnittpunkt, bei dem die Ameise von w aus gesehen nach **links** abbiegt.
7. Weg: $B \rightarrow M_1 \rightarrow P \rightarrow D$.

8 Zucker in Cola

3 Punkte

a) Ergebnis: 18 Würfelzucker

- Zuckeranteil: $100\% - 89\% = 11\%$
- 5 dl Cola wiegen 500 g, davon Zucker: $11\% \cdot 500 \text{ g} = 55 \text{ g}$
- $55 \text{ g} : 3 \text{ g} \approx 18.33$, also 18 Würfelzucker.

b) Ergebnis: 1.3 Liter

- 431 mg = 0.431 g sind 0.3% des Zuckers. Ganze Zuckermenge: $0.431 \text{ g} : 0.003 \approx 143.67 \text{ g}$
- Diese Zuckermenge sind 11% der Cola: $143.67 \text{ g} : 0.11 \approx 1306 \text{ g}$
- 1306 g Cola entsprechen etwa 1.3 Liter.



9 Mengen bestimmen

2 Punkte

Ergebnis: $\{a, d, e\}; \{a, d, e, b\}; \{a, d, e, c\}$

- Damit die Vereinigung $\{a, b, c, d, e\}$ ergibt, muss $\mathbb{M}$ die Elemente a, d und e enthalten. Andere Elemente als a bis e sind nicht erlaubt.
- b und c dürfen in $\mathbb{M}$ sein, aber nicht beide gleichzeitig (sonst wäre $\{b, c\}$ Teilmenge von $\mathbb{M}$).
- Also: $\{a, d, e\}, \{a, d, e, b\}$ und $\{a, d, e, c\}$.

10 Wasser im Zylinder

3 Punkte

a) **Ergebnis: 2.7 Liter**

- Es fehlen noch $15 - 6 = 9$ cm Wasserhöhe.
- $V = 300 \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ cm} = 2700 \text{ cm}^3 = 2.7 \text{ Liter}$ (denn $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ Liter}$).

b) **Ergebnis: 9 cm**

- Wassermenge: $V = 300 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 1800 \text{ cm}^3$
- Neben dem Zylinder bleibt für das Wasser nur noch die Fläche $300 - 100 = 200 \text{ cm}^2$.
- Das Wasser steht bis zur Höhe des Zylinders: $h = 1800 : 200 = 9 \text{ cm}$.

11 Armbrustschiessen mit Gleichung

4 Punkte

Ergebnis: 1755 Teilnehmer

- x = Anzahl Mädchen, $x + 135$ = Anzahl Knaben.
- Gesamtpunktzahl = Anzahl · Durchschnitt: Knaben $63(x + 135)$, Mädchen $70x$.
- Gleichung:

$$\frac{4}{7} \cdot (x + 135) \cdot 63 = \frac{3}{5} \cdot x \cdot 70$$

- Ausrechnen: $36(x + 135) = 42x$, also $36x + 4860 = 42x$ und $6x = 4860$, $x = 810$.
- Knaben: $810 + 135 = 945$. Total: $810 + 945 = 1755$ Teilnehmer.