

Mathematik · 2. Sek

90 Minuten · 11 Aufgaben · 35 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Üblicher Sekundarschulrechner erlaubt
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich:

a)

$$15(2x - x) - 12x^2 : \frac{x}{3}$$

Term: _____

b)

$$17 \cdot 19^3 \cdot \left(\frac{x + y}{17 \cdot 19^2} - \frac{8x}{17 \cdot 19^3} \right)$$

Term: _____

2 Potenzen und Bruchgleichung

4 Punkte

a) Für die drei positiven Zahlen x , y und z gilt: $2^x = 8$, $y^2 = 36$ und $(\sqrt{z})^2 = 9$.

Gib die Zahlen x , y und z an und berechne den Kehrwert des Produkts von x , y und z .
(Genauigkeit: 5 Dezimalen)

x : _____

y : _____

z : _____

Kehrwert: _____

b) Bestimme die Lösung folgender Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$\frac{2x+9}{3} - 2 = \frac{x}{6} - \frac{3x+6}{11}$$

x : _____

3 Kostenvergleich zweier Lokale

4 Punkte

Für ein Fest kommen die zwei Lokale A und B in Frage. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten in Schweizer Franken:

Lokal	A	B
Essen pro Person	24	20
Raummiete	400	900
Musikanlage	360	300

a) Berechne den Unterschied der Kosten pro Person zwischen den beiden Lokalen bei 180 Teilnehmern. Runde dein Resultat auf 5 Rappen genau.

Unterschied pro Person: _____ Fr.

- b) Berechne mit Hilfe einer Gleichung oder Ungleichung, ab welcher Teilnehmerzahl Lokal *B* günstiger als Lokal *A* ist.

ab Teilnehmerzahl: _____ Personen

4 CDs verpacken

2 Punkte

Robert, Silvan und Thomas verpacken CDs. Robert macht 32-er Packungen, Silvan 36-er Packungen und Thomas 48-er Packungen. Die drei Knaben verpacken je gleich viele CDs, nämlich zwischen 5400 und 5600 Stück. Berechne, wie viele CDs zu Beginn pro Person bereit liegen, wenn bei jedem am Schluss 5 Stück übrig bleiben.

CDs pro Person: _____ CDs

5 Elfer-Zahlen aufsagen

2 Punkte

Bestimme, wie viele Stunden, Minuten und Sekunden es dauert, um alle durch elf teilbaren Zahlen, die zwischen 400'000 und 500'000 liegen, laut aufzusagen, wenn man pro Zahl durchschnittlich drei Sekunden benötigt.

Stunden: _____ h

Minuten: _____ min

Sekunden: _____ s

6 Facebook-Benutzende in einer Stadt

4 Punkte

In einer Stadt leben insgesamt 3200 männliche und 3000 weibliche Personen. In der ganzen Stadt ist ein Achtel aller männlichen Personen "Facebook"-Benutzer, bei den weiblichen Personen ist es ein Fünftel.

288 Knaben und 252 Mädchen der Bevölkerung dieser Stadt sind Schulkinder. Unter diesen sind zwei Drittel der Knaben und drei Viertel der Mädchen "Facebook"-Benutzende.

- a) Gib die Anzahl der "Facebook"-Benutzenden als Bruchteil der Bevölkerung der Stadt an.

Bruchteil: _____

- b) Berechne, wie viele Personen neue "Facebook"-Benutzende werden müssten, damit der Anteil aller "Facebook"-Benutzenden auf drei Achtel steigen würde.

neue Benutzende: _____ Personen

- c) Gib die Anzahl Schulkinder, die "Facebook"-Benutzende sind, als Bruchteil der Anzahl aller "Facebook"-Benutzenden in der ganzen Stadt an.

Bruchteil: _____

7 Produkt der Ziffern

3 Punkte

Von einer vierstelligen Zahl wird das Produkt ihrer Ziffern berechnet.

- a) Gib (irgend) eine vierstellige Zahl an, für die das Produkt der vier Ziffern 6 beträgt.

Zahl: _____

- b) Gib (irgend) eine vierstellige Zahl an, für die das Produkt der vier Ziffern 675 beträgt.

Zahl: _____

8 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

Berechne in neben stehender Figur den Winkel α .

α : _____ °

9 Prisma mit ausgeschnittenem Quader

4 Punkte

Im abgebildeten senkrechten Prisma ist die Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez. Daraus wird ein Quader herausgeschnitten, dessen Volumen ein Fünftel des ursprünglichen Volumens des Prismas beträgt (siehe nicht massstabstreue Figur).

a) Berechne das Volumen des Restkörpers.

Volumen: _____ cm^3

b) Berechne den Oberflächeninhalt des herausgeschnittenen Quaders.

Oberfläche: _____ cm^2

10 Streckenzug auf dem Würfel

2 Punkte

- a) Der Würfel mit dem eingezeichneten (auf der Würfeloberfläche verlaufenden) Streckenzug liegt auf einem Tisch und wird zweimal nach links gekippt (siehe Figur). Zeichne die neue Lage des Streckenzugs in den rechts stehenden Würfel ein.
- b) Derselbe Würfel wie in Teilaufgabe a) ist in zwei verschiedenen Lagen dargestellt (siehe Figur). Ergänze den unvollständigen Streckenzug.

11 Quadrat konstruieren

4 Punkte

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit M als Mittelpunkt, wobei Folgendes gilt: $M \in g$, $R \in AC$, $S \in BD$ und $AC = 10 \text{ cm}$ (siehe Figur).

Schreibe dazu auch einen vollständigen Konstruktionsbericht. Zeichne alle Lösungen ein.

Lösungen

Gymiprüfung 2010 Mathematik (2. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $-21x$

- Klammer zuerst: $2x - x = x$, also $15 \cdot x = 15x$.
- Punkt vor Strich: $12x^2 : \frac{x}{3} = 12x^2 \cdot \frac{3}{x} = 36x$.
- Zusammen: $15x - 36x = -21x$.

b) **Ergebnis:** $11x + 19y$

Geschickt: Multipliziere jeden Bruch einzeln aus, dann kürzt sich fast alles weg.

- $17 \cdot 19^3 \cdot \frac{x+y}{17 \cdot 19^2} = 19(x + y) = 19x + 19y$
 - $17 \cdot 19^3 \cdot \frac{8x}{17 \cdot 19^3} = 8x$
 - $19x + 19y - 8x = 11x + 19y$
-

2 Potenzen und Bruchgleichung

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 3, y = 6, z = 9$; Kehrwert $\frac{1}{162} = 0.00617$

- $2^3 = 8$, also $x = 3$.
- $6^2 = 36$ und y ist positiv, also $y = 6$.
- $(\sqrt{z})^2 = z$, also $z = 9$.
- Produkt: $3 \cdot 6 \cdot 9 = 162$.
- Kehrwert: $1 : 162 = 0.0061728 \dots \approx 0.00617$

b) **Ergebnis:** $x = -2$

- Hauptnenner ist 66. Multipliziere die ganze Gleichung mit 66: $22(2x + 9) - 132 = 11x - 6(3x + 6)$
 - Klammern auflösen: $44x + 198 - 132 = 11x - 18x - 36$
 - Zusammenfassen: $44x + 66 = -7x - 36$
 - $51x = -102$, also $x = -2$.
-



3 Kostenvergleich zweier Lokale

4 Punkte

a) Ergebnis: Fr. 1.55

- Lokal A: $24 \cdot 180 + 400 + 360 = 5080$ Fr.
- Lokal B: $20 \cdot 180 + 900 + 300 = 4800$ Fr.
- Unterschied total: $5080 - 4800 = 280$ Fr.
- Pro Person: $280 : 180 = 1.555 \dots$ Fr.
- Auf 5 Rappen gerundet: 1.55 Fr.

b) Ergebnis: ab 111 Personen

- x = Anzahl Teilnehmer. Kosten gleich setzen: $24x + 400 + 360 = 20x + 900 + 300$
- $24x + 760 = 20x + 1200$
- $4x = 440$, also $x = 110$.
- Bei 110 Personen kosten beide gleich viel. Pro zusätzliche Person wird B um 4 Fr. günstiger, also ist B ab 111 Personen günstiger.

4 CDs verpacken

2 Punkte

Ergebnis: 5477 CDs

- Die verpackte Anzahl muss durch 32, 36 und 48 teilbar sein, also ein Vielfaches des kgV.
- $32 = 2^5$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$, also $\text{kgV} = 2^5 \cdot 3^2 = 288$.
- Vielfaches zwischen 5400 und 5600: $19 \cdot 288 = 5472$.
- Dazu kommen die 5 übrigen CDs: $5472 + 5 = 5477$.

5 Elfer-Zahlen aufsagen

2 Punkte

Ergebnis: 7 h 34 min 33 s

- Der Bereich umfasst 100'000 Zahlen: $100'000 : 11 = 9090.9 \dots$
- Genau gezählt: erste Elferzahl ist $11 \cdot 36'364 = 400'004$, letzte ist $11 \cdot 45'454 = 499'994$. Das sind $45'454 - 36'364 + 1 = 9091$ Zahlen.
- Zeit: $9091 \cdot 3 \text{ s} = 27'273 \text{ s}$
- $27'273 \text{ s} = 7 \cdot 3600 \text{ s} + 2073 \text{ s}$ und $2073 \text{ s} = 34 \cdot 60 \text{ s} + 33 \text{ s}$
- Ergebnis: 7 h 34 min 33 s

6 Facebook-Benutzende in einer Stadt

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{1000}{6200} = \frac{5}{31} (\approx 0.161)$

- Männlich: $\frac{1}{8}$ von 3200 = 400
- Weiblich: $\frac{1}{5}$ von 3000 = 600
- Zusammen 1000 Benutzende von 6200 Personen: $\frac{1000}{6200} = \frac{5}{31}$

b) **Ergebnis: 1325 Personen**

- $\frac{3}{8}$ von 6200 = 2325 Benutzende wären nötig.
- Es gibt schon 1000: $1000 + x = 2325$, also $x = 1325$.

c) **Ergebnis:** $\frac{381}{1000} (= 0.381)$

- Knaben: $\frac{2}{3}$ von 288 = 192
- Mädchen: $\frac{3}{4}$ von 252 = 189
- Zusammen $192 + 189 = 381$ Schulkinder von 1000 Benutzenden: $\frac{381}{1000}$

7 Produkt der Ziffern

3 Punkte

a) **Ergebnis: z. B. 3211, 1213 oder 6111**

- $6 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ oder $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$.
- Die Ziffern 6, 1, 1, 1 oder 3, 2, 1, 1 in beliebiger Reihenfolge ergeben eine Lösung, z. B. 3211, 1213 oder 6111.

b) **Ergebnis: Ziffern 9, 3, 5, 5; z. B. 9553**

- Primfaktorzerlegung: $675 = 3^3 \cdot 5^2$.
- 25 ist keine Ziffer, also braucht es zwei Fünfen.
- Für $3^3 = 27$ bleiben nur noch zwei Ziffern: $27 = 3 \cdot 9$.
- Ziffern 9, 3, 5, 5 in beliebiger Reihenfolge, z. B. 9553.

8 Winkel im Halbkreis

2 Punkte

Ergebnis: $\alpha = 75^\circ$

- Die untere Sehne ist parallel zum Durchmesser. Deshalb ist der Winkel unten rechts (50°) gleich gross wie der Wechselwinkel bei M .
- Das Dreieck aus M und den beiden Endpunkten der unteren Sehne ist gleichschenkelig (zwei Radien): beide Basiswinkel sind 50° , der Winkel bei M ist $180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$.
- Beim Kreismittelpunkt liegen also die Winkel 50° und 80° nebeneinander.
- Das Dreieck aus M , dem linken Sehnenendpunkt und dem rechten Ende des Durchmessers ist ebenfalls gleichschenkelig. Winkel bei M : $50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$, also sind die Basiswinkel je $(180^\circ - 130^\circ) : 2 = 25^\circ$.
- Im Dreieck mit α (Ecken: M , linker Sehnenendpunkt, Schnittpunkt): $\alpha = 180^\circ - 80^\circ - 25^\circ = 75^\circ$.

9 Prisma mit ausgeschnittenem Quader

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $12'000 \text{ cm}^3$

- Trapezhöhe mit Pythagoras: Die Schenkel stehen je $(30 - 20) : 2 = 5 \text{ cm}$ vor, also $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$.
- Trapezfläche: $A = \frac{30+20}{2} \cdot 12 = 300 \text{ cm}^2$
- Prismavolumen: $V = 300 \cdot 50 = 15'000 \text{ cm}^3$
- Restkörper: $15'000 - 15'000 : 5 = 15'000 - 3000 = 12'000 \text{ cm}^3$

b) **Ergebnis:** 2420 cm^2

- Quadervolumen: $15'000 : 5 = 3000 \text{ cm}^3$, Länge 50 cm , Breite 20 cm .
- Fehlende Kante (Tiefe): $(3000 : 50) : 20 = 3 \text{ cm}$
- Oberfläche: $2 \cdot (20 \cdot 3 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 50) = 2 \cdot 1210 = 2420 \text{ cm}^2$

10 Streckenzug auf dem Würfel

2 Punkte

a) **Ergebnis:** Siehe Lösungsfigur.

- Zweimal nach links kippen heisst: Der Würfel macht eine halbe Drehung um eine Achse, die von vorne nach hinten zeigt. Oben wird unten, links wird rechts, vorne bleibt vorne und hinten bleibt hinten.
- So wird zum Beispiel die Ecke oben hinten links zur Ecke unten hinten rechts.
- Übertrage jede Teilstrecke Ecke für Ecke in die neue Lage. Verdeckte Teilstrecken zeichnest du gestrichelt (siehe Lösungsfigur).

b) **Ergebnis: Siehe Lösungsfigur.**

- Suche das sichtbare Stück im rechten Würfel im linken Würfel: Es ist das Stück auf der Deckfläche. Daraus erkennst du, wie der Würfel gedreht wurde.
- Übertrage dann die übrigen Teilstrecken Ecke für Ecke und Kante für Kante in die neue Lage. Verdeckte Teilstrecken zeichnest du gestrichelt.
- Der vollständige Streckenzug ist in der Lösungsfigur zu sehen.

11

Quadrat konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: Zwei Lösungen: $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$.

Idee: Im Quadrat stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Also sieht man RS von M aus unter einem rechten Winkel, M liegt auf dem Thaleskreis über RS .

Konstruktionsbericht: 1. Thaleskreis über RS schneidet g in M_1 und M_2 . 2. $k(M_1, r = 5 \text{ cm}) \cap M_1R$ ergibt A_1, C_1 . 3. $k(M_1, r = 5 \text{ cm}) \cap M_1S$ ergibt B_1, D_1 . 4. $k(M_2, r = 5 \text{ cm}) \cap M_2R$ ergibt A_2, C_2 . 5. $k(M_2, r = 5 \text{ cm}) \cap M_2S$ ergibt B_2, D_2 .

Der Radius ist 5 cm, weil die Diagonale $AC = 10 \text{ cm}$ lang ist und M sie halbiert.

