

Mathematik · 3. Sek

90 Minuten · 11 Aufgaben · 35 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (nur übliche Sekundarschulrechner)
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich:

a)

$$(-15)(x - 2x) - 12x^2 : \frac{x^2 - 2x}{3x - 6}$$

Term: _____

b)

$$17 \cdot 19^4 \cdot \left(\frac{x + y}{17 \cdot 19^3} - \frac{8x - y}{17 \cdot 19^4} \right)$$

Term: _____

2 Potenzen und Gleichung

4 Punkte

a) Für die drei Zahlen x , y und z gilt: $x^3 = 64$, $2^y = 64$ und $(\sqrt{z})^2 = 9$.

Gib die Zahlen x , y und z an und berechne den Kehrwert des Produkts von x , y und z .
(Genauigkeit: 5 Dezimalen)

x: _____

y: _____

z: _____

Kehrwert des Produkts: _____

b) Bestimme die Lösung folgender Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$\left(-\frac{x}{6}\right) + 3 \cdot \frac{x+2}{11} = \left(-\frac{2x+9}{3}\right) + 2$$

x: _____

3 Lokale für ein Fest

4 Punkte

Für ein Fest kommen die drei Lokale A , B und C in Frage. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten in Schweizer Franken:

Lokal	A	B	C
Essen pro Person	24	20	15
Raummiete	400	900	2300
Musikanlage	360	300	600

a) Berechne mit Hilfe einer Gleichung oder Ungleichung, ab welcher Teilnehmerzahl Lokal B günstiger als Lokal A ist.

ab: _____ Personen

- b) Gib an, für welche Teilnehmerzahlen Lokal C günstiger als die anderen beiden Lokale ist. Benutze dazu mindestens eine weitere Gleichung oder Ungleichung.

ab: _____ Personen

4 CDs verpacken

2 Punkte

Robert, Silvan und Thomas verpacken CDs. Robert macht 32-er Packungen, Silvan 36-er Packungen und Thomas 48-er Packungen. Die drei Knaben verpacken je gleich viele CDs, nämlich zwischen 5400 und 5600 Stück. Berechne, wie viele CDs zu Beginn pro Person bereit liegen, wenn bei jedem am Schluss 5 Stück übrig bleiben.

CDs pro Person: _____ Stück

5 Elferzahlen aufzählen

2 Punkte

Bestimme, wie viele Stunden, Minuten und Sekunden es dauert, um alle durch elf teilbaren Zahlen, die zwischen 400'000 und 500'000 liegen, laut aufzusagen, wenn man pro Zahl durchschnittlich drei Sekunden benötigt.

Stunden: _____ h

Minuten: _____ min

Sekunden: _____ s

6 Facebook-Nutzung in einer Stadt

4 Punkte

In einer Stadt leben insgesamt 3200 männliche und 3000 weibliche Personen. In der ganzen Stadt sind 12.5% aller männlichen Personen "Facebook"-Benutzer, bei den weiblichen Personen sind es 20%.

288 Knaben und 252 Mädchen der Bevölkerung dieser Stadt sind Schulkinder. Unter diesen sind zwei Drittel der Knaben und drei Viertel der Mädchen "Facebook"- Benutzende.

- a) Berechne, wie viel Prozent der Bevölkerung dieser Stadt "Facebook" benutzen. Runde das Ergebnis auf eine ganze Prozentzahl.

Anteil: _____ %

- b) Berechne, wie viele Personen neue "Facebook"-Benutzende werden müssten, damit der Anteil aller "Facebook"-Benutzenden auf 37.5% steigen würde.

Neue Benutzende: _____ Personen

- c) Gib die Anzahl Schulkinder, die "Facebook"-Benutzende sind, als Bruchteil der Anzahl aller "Facebook"-Benutzenden in der ganzen Stadt an.

Bruchteil: _____



Produkt der Ziffern

3 Punkte

Von einer vierstelligen Zahl wird das Produkt ihrer Ziffern berechnet.

- a) Gib (irgend) eine vierstellige Zahl an, für die das Produkt der vier Ziffern 6 beträgt.

Zahl: _____

- b) Gib (irgend) eine vierstellige Zahl an, für die das Produkt der vier Ziffern 675 beträgt.

Zahl: _____

8 Graue Fläche im Quadrat

2 Punkte

Berechne in neben stehender Figur den prozentualen Anteil der grauen Fläche an der Fläche des grossen Quadrates, wenn eine Quadratseite 12 cm misst. (Genauigkeit: 2 Dezimalen)

Anteil: _____ %

9 Prisma mit Quader-Ausschnitt

4 Punkte

Im abgebildeten senkrechten Prisma ist die Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez. Daraus wird ein Quader herausgeschnitten, dessen Volumen ein Fünftel des ursprünglichen Volumens des Prismas beträgt (siehe nicht massstabstreue Figur).

- a) Berechne das Volumen des Restkörpers.

Volumen: _____ cm^3

- b) Berechne den Oberflächeninhalt des herausgeschnittenen Quaders.

Oberfläche: _____ cm^2

10 Streckenzug auf dem Würfel

2 Punkte

- a) Der Würfel mit dem eingezeichneten (auf der Würfeloberfläche verlaufenden) Streckenzug liegt auf einem Tisch und wird zweimal nach links gekippt (siehe Figur). Zeichne die neue Lage des Streckenzugs in den rechts stehenden Würfel ein.

- b) Derselbe Würfel wie in Teilaufgabe a) ist in zwei verschiedenen Lagen dargestellt (siehe Figur). Ergänze den unvollständigen Streckenzug.

11 Quadrat konstruieren

4 Punkte

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit M als Mittelpunkt, wobei Folgendes gilt: $M \in g$, $R \in AC$, $S \in BD$ und $AC = 10$ cm (siehe Figur).

Schreibe dazu auch einen vollständigen Konstruktionsbericht. Zeichne alle Lösungen ein.

Lösungen

Gymiprüfung 2010 Mathematik (3. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $-21x$

- Erste Klammer: $x - 2x = -x$, also $(-15)(-x) = 15x$.
- Durch einen Bruch teilst du, indem du mit dem Kehrwert multiplizierst. Faktorisiere vorher: $x^2 - 2x = x(x - 2)$ und $3x - 6 = 3(x - 2)$.
- $12x^2 : \frac{x(x-2)}{3(x-2)} = 12x^2 \cdot \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = 12x \cdot 3 = 36x$
- Punkt vor Strich: $15x - 36x = -21x$

b) **Ergebnis:** $11x + 20y$

Multipliziere den Faktor vor der Klammer in jeden Bruch hinein und kürze, statt die grossen Potenzen auszurechnen:

- $17 \cdot 19^4 \cdot \frac{x+y}{17 \cdot 19^3} = 19(x + y) = 19x + 19y$
- $17 \cdot 19^4 \cdot \frac{8x-y}{17 \cdot 19^4} = 8x - y$
- $19x + 19y - (8x - y) = 19x + 19y - 8x + y = 11x + 20y$

2 Potenzen und Gleichung

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 4, y = 6, z = 9$; Kehrwert $\frac{1}{216} = 0.00463$

- $x^3 = 64: 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, also $x = 4$.
- $2^y = 64: 2^6 = 64$, also $y = 6$.
- $(\sqrt{z})^2 = z$, also $z = 9$.
- Produkt: $4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$
- Kehrwert: $1 : 216 = 0.0046296 \dots \approx 0.00463$

b) **Ergebnis:** $x = -2$

- Multipliziere die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner 66, dann verschwinden die Brüche: $-11x + 18(x + 2) = -22(2x + 9) + 132$
- Ausmultiplizieren: $-11x + 18x + 36 = -44x - 198 + 132$
- Zusammenfassen: $7x + 36 = -44x - 66$
- $51x = -102$, also $x = -2$

- Probe: links $\frac{2}{6} + 0 = \frac{1}{3}$, rechts $-\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3} \checkmark$

3 Lokale für ein Fest

4 Punkte

a) Ergebnis: ab 111 Personen

- x = Anzahl Personen. Kosten: $A: 24x + 400 + 360 = 24x + 760$, $B: 20x + 900 + 300 = 20x + 1200$.
- Gleich teuer: $24x + 760 = 20x + 1200$, also $4x = 440$, $x = 110$.
- Bei 110 Personen kosten beide gleich viel. Da A pro Person mehr kostet, ist B ab **111 Personen** günstiger.

b) Ergebnis: ab 341 Personen

- Kosten $C: 15x + 2300 + 600 = 15x + 2900$.
- Ab 111 Personen ist B günstiger als A , also muss C vor allem B schlagen: $20x + 1200 = 15x + 2900$, also $5x = 1700$, $x = 340$.
- Bei 340 Personen kosten B und C gleich viel, ab **341 Personen** ist C am günstigsten.
- Kontrolle mit $A: 24x + 760 = 15x + 2900$ ergibt $x \approx 237.8$. Bei 341 Personen ist C also auch günstiger als A .

4 CDs verpacken

2 Punkte

Ergebnis: 5477 CDs

- Die verpackte Anzahl muss durch 32, 36 und 48 teilbar sein, also ein Vielfaches des kgV.
- $32 = 2^5$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$, also $\text{kgV} = 2^5 \cdot 3^2 = 288$.
- Vielfaches zwischen 5400 und 5600: $19 \cdot 288 = 5472$ ($18 \cdot 288 = 5184$ und $20 \cdot 288 = 5760$ liegen ausserhalb).
- Dazu kommen die 5 übrigen CDs: $5472 + 5 = 5477$.

5 Elferzahlen aufzählen

2 Punkte

Ergebnis: 7 h 34 min 33 s

- Der Bereich umfasst 100'000 Zahlen, $100'000 : 11 = 9090.9 \dots$

- Genau gezählt: $400'000 : 11 = 36'363.6 \dots$ und $500'000 : 11 = 45'454.5 \dots$, also die Vielfachen $11 \cdot 36'364$ bis $11 \cdot 45'454$. Das sind $45'454 - 36'363 = 9091$ Zahlen.
- Zeit: $9091 \cdot 3 \text{ s} = 27'273 \text{ s}$
- $27'273 \text{ s} = 7 \cdot 3600 \text{ s} + 2073 \text{ s}$ und $2073 \text{ s} = 34 \cdot 60 \text{ s} + 33 \text{ s}$
- Ergebnis: 7 h 34 min 33 s

6 Facebook-Nutzung in einer Stadt

4 Punkte

a) Ergebnis: 16%

- Männer: 12.5% von $3200 = 400$
- Frauen: 20% von $3000 = 600$
- Zusammen 1000 Benutzende von 6200 Personen: $\frac{1000}{6200} = 0.161 \dots \approx 16\%$

b) Ergebnis: 1325 Personen

- 37.5% von $6200 = 2325$ Personen
- Heute sind es 1000, also fehlen $2325 - 1000 = 1325$ Personen.

c) Ergebnis: $\frac{381}{1000}$ ($= 0.381$)

- Knaben: $\frac{2}{3}$ von $288 = 192$
- Mädchen: $\frac{3}{4}$ von $252 = 189$
- Zusammen 381 Schulkinder von 1000 Benutzenden (aus a): $\frac{381}{1000} = 0.381$

7 Produkt der Ziffern

3 Punkte

a) Ergebnis: z.B. 3211 oder 1213 oder 6111 (usw.)

- $6 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ oder $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$.
- Jede Anordnung dieser Ziffern passt, z.B. 3211, 1213 oder 6111.

b) Ergebnis: Ziffern 9, 3, 5, 5; z.B. 9553

- Primfaktorzerlegung: $675 = 3^3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
- Das sind fünf Faktoren, du brauchst aber vier Ziffern. Fasse zwei Dreien zusammen: $3 \cdot 3 = 9$.
- Ziffern: 9, 3, 5, 5, z.B. die Zahl 9553 (jede Anordnung passt).

8 Graue Fläche im Quadrat

2 Punkte

Ergebnis: 53.54%

Die Mittellinien teilen das grosse Quadrat in vier kleine Quadrate mit Seite 6 cm.

- Grosses Quadrat: $12^2 = 144 \text{ cm}^2$
- Dreieck (halbes kleines Quadrat): $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$
- Viertelkreis mit $r = 6 \text{ cm}$: $\frac{6^2 \cdot \pi}{4} \approx 28.27 \text{ cm}^2$
- Eine "Linse" = $2 \times (\text{Viertelkreis} - \text{Dreieck}) = 2 \cdot (28.27 - 18) = 20.55 \text{ cm}^2$
- Grau sind 2 Linsen und 2 Dreiecke: $2 \cdot 20.55 + 2 \cdot 18 = 77.1 \text{ cm}^2$
- Anteil: $77.1 : 144 = 0.5354 = 53.54\%$

Andere Möglichkeit: Weisses krummlinig begrenztes Stück = kleines Quadrat – Viertelkreis
 $= 36 - 28.27 = 7.73 \text{ cm}^2$. Grau = $144 - 4 \cdot 7.73 - 2 \cdot 18 = 77.1 \text{ cm}^2$.

9 Prisma mit Quader-Ausschnitt

4 Punkte

a) Ergebnis: $12'000 \text{ cm}^3$

- Das Trapez ist unten 30 cm, oben 20 cm breit. Auf jeder Seite steht es also $\frac{30-20}{2} = 5 \text{ cm}$ vor.
- Höhe mit Pythagoras: $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$
- Trapezfläche: $\frac{30+20}{2} \cdot 12 = 300 \text{ cm}^2$
- Prisma: $V = 300 \cdot 50 = 15'000 \text{ cm}^3$
- Ein Fünftel wird herausgeschnitten: $15'000 - 15'000 : 5 = 12'000 \text{ cm}^3$

b) Ergebnis: 2420 cm^2

- Quadvolumen: $15'000 : 5 = 3000 \text{ cm}^3$
 - Der Quader ist 50 cm lang und 20 cm breit. Fehlende Kante (Tiefe): $(3000 : 50) : 20 = 3 \text{ cm}$
 - Oberfläche: $2 \cdot (20 \cdot 3 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 50) = 2 \cdot 1210 = 2420 \text{ cm}^2$
-

10 Streckenzug auf dem Würfel

2 Punkte

a) Ergebnis: Siehe Lösungsfigur.

Zweimal nach links kippen ist eine halbe Drehung um die Achse von vorne nach hinten:
oben und unten tauschen, links und rechts tauschen, vorne bleibt vorne.

- Die Ecke hinten links oben wandert nach hinten rechts unten.
- Die Mitte der vorderen oberen Kante wandert zur Mitte der vorderen unteren Kante.
- Die Mitte der vorderen rechten Kante wandert zur Mitte der vorderen linken Kante.
- Die Mitte der hinteren rechten Kante wandert zur Mitte der hinteren linken Kante.

Neuer Streckenzug: Auf der Vorderfläche (sichtbar, durchgezogen) von der Mitte der linken Kante zur Mitte der unteren Kante. Die anderen drei Strecken liegen auf verdeckten Flächen (gestrichelt): über die Bodenfläche zur Ecke hinten rechts unten, über die Rückfläche zur Mitte der hinteren linken Kante und über die linke Seitenfläche zurück zum Startpunkt.

b) Ergebnis: Siehe Lösungsfigur.

Der Streckenzug besteht aus vier Strecken: von einer Ecke zur Mitte der gegenüberliegenden Kante, dann quer über eine Ecke zur Mitte einer Nachbarkante, dann parallel zu einer Würfelkante zur Mitte der gegenüberliegenden Kante, dann zurück zur Ecke. Das gegebene Stück auf der Deckfläche (von der Mitte der linken Kante zur Mitte der vorderen Kante) ist die Strecke "quer über eine Ecke".

- Von der Mitte der vorderen oberen Kante geht es auf der Vorderfläche (durchgezogen) zur Ecke vorne rechts unten.
- Von dieser Ecke auf der Bodenfläche (gestrichelt) zur Mitte der linken unteren Kante.
- Auf der linken Seitenfläche (gestrichelt) senkrecht hinauf zur Mitte der linken oberen Kante, dem Anfang des gegebenen Stücks.

11 Quadrat konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: Zwei Lösungen: Quadrate $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$.

Die Diagonalen eines Quadrats stehen senkrecht aufeinander. M liegt auf AC (durch R) und auf BD (durch S), also ist der Winkel RMS ein rechter Winkel. Darum liegt M auf dem Thaleskreis über RS .

Konstruktionsbericht: 1. Thaleskreis über RS schneidet g in M_1 und M_2 . 2. $k(M_1, r = 5 \text{ cm}) \cap M_1R$ ergibt A_1, C_1 . 3. $k(M_1, r = 5 \text{ cm}) \cap M_1S$ ergibt B_1, D_1 . 4. $k(M_2, r = 5 \text{ cm}) \cap M_2R$ ergibt A_2, C_2 . 5. $k(M_2, r = 5 \text{ cm}) \cap M_2S$ ergibt B_2, D_2 .

Der Radius ist 5 cm, weil die halbe Diagonale $AC : 2 = 5 \text{ cm}$ misst. Es gibt zwei Lösungen.