

Mathematik · 2. Sek

90 Minuten · 12 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner: nur übliche Sekundarschulrechner
- Alle Aufgaben im Heft lösen, kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Reihenfolge der Aufgaben frei

1 Terme und kgV

4 Punkte

- a) Setze im Term $5000 - a \cdot b$ für a die Zahl (-2) und für b die Zahl $4.4 \cdot 10^3$ ein und rechne den Term anschliessend aus.

Wert des Terms: _____

- b) Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 20 und keine Primzahlen sind.

kgV: _____

- c) Bestimme den Term, mit welchem man $\sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{35x^2} : 7$ multiplizieren muss, um $2x(x - 3) \cdot 5x + 30x^2$ zu erhalten.

Term: _____

2 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Bestimme die Lösung folgender Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$4x - \frac{3(2x - 5)}{7} = \frac{7x}{4} + \frac{69}{14}$$

x: _____

3 RadfahrerIn und Durchschnittsgeschwindigkeit

3 Punkte

Eine RadfahrerIn benötigt für den ersten Teil einer Strecke 15 min, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Berechne, wie schnell sie die zweite Teilstrecke von 10 km Länge zurücklegen muss, damit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Strecke $22.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt. Gib dein Resultat in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an. (Genauigkeit: 1 Dezimale)

Geschwindigkeit auf der 2. Teilstrecke: _____ km/h

4 Geld auf zwei Konten

3 Punkte

Die Summe von Fr. 19 500.– ist auf zwei Bankkonten verteilt. $\frac{3}{4}$ des Betrags, welcher auf dem einen Konto liegt, ist um Fr. 1500.– grösser als der Betrag auf dem anderen Konto. Benutze eine Gleichung, um den *kleineren* der beiden Beträge zu berechnen. (Lösungen ohne Gleichungen geben Null Punkte.)

Kleinerer Betrag: _____ Fr.

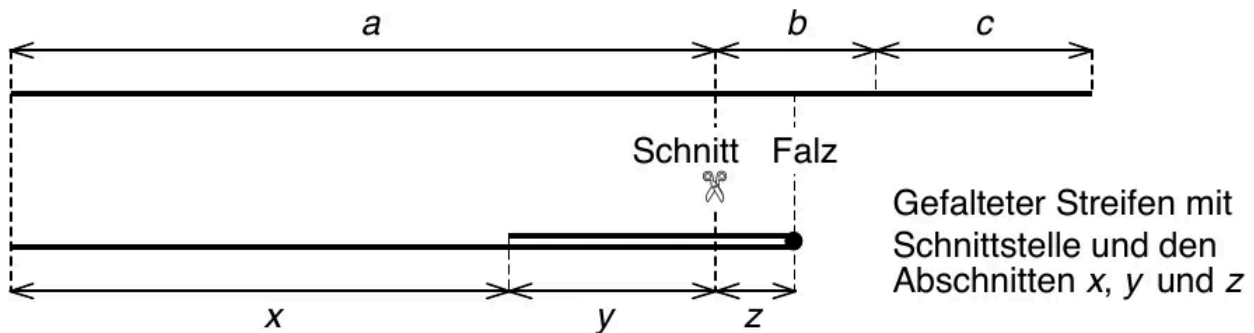
5

Gefalteter Papierstreifen

3 Punkte

Ein Papierstreifen wird ein Mal gefaltet, dann wird durch den gefalteten (doppelten) Streifen geschnitten. So entstehen drei Teile mit Längen a , b bzw. c Zentimeter. Weiter werden gemäss unten stehender Figur die durch Falz und Schnitt entstehenden Abschnitte mit x , y und z bezeichnet.

Oben: ungefalteter Streifen mit Länge $a + b + c$. Unten: gefalteter Streifen mit Schnittstelle und den Abschnitten x , y und z .



- a) Aus der Figur entnimmt man, dass $y = c$ ist. Schreibe entsprechende Ausdrücke für x und z , wobei in deinem Resultat nur die Variablen a , b und c , nicht aber x , y oder z vorkommen dürfen.

x : _____

z : _____

- b) Bestimme das Verhältnis der Längen der drei Streifenteile $a : b : c$, wenn y doppelt so lang ist wie z , und x dreimal so lang ist wie z (siehe nicht massstabgetreue Figur).

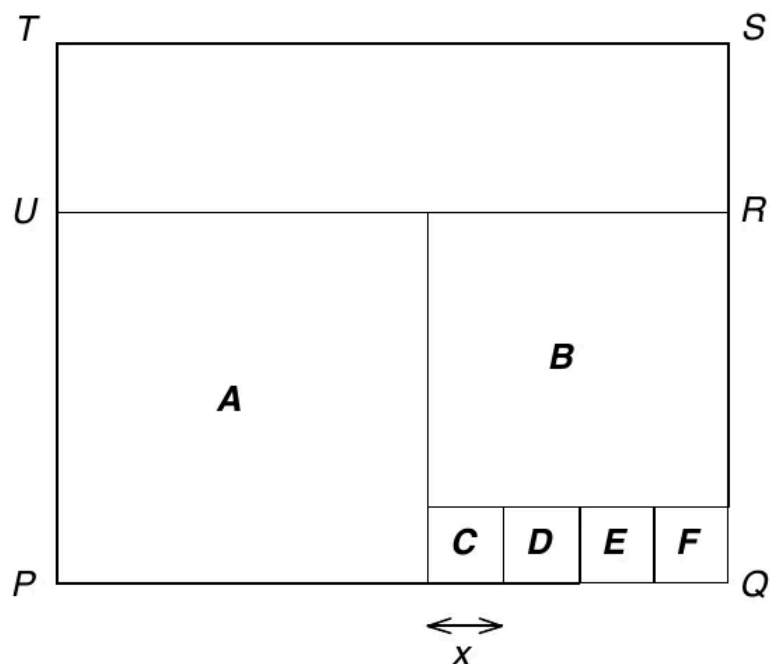
$a : b : c$: _____

6 Rechteck aus Quadraten

3 Punkte

In folgender nicht massstabgetreuer Figur sind **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** alles Quadrate.

6. In folgender nicht massstabgetreuer Figur sind **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** alles Quadrate.



- a) Die Seitenlänge des Quadrats **C** misst x Zentimeter. Drücke den Flächeninhalt des Rechtecks $PQRU$ durch x aus.

Flächeninhalt $PQRU$: _____ cm^2

- b) Im Rechteck $URST$ gilt: $\overline{UR} : \overline{RS} = 3 : 2$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $PQST$ beträgt 6336 cm^2 . Bestimme die Länge der Seite des Quadrats **C**.

Seitenlänge von **C**: _____ cm

7 Quader aus Würfeln

3 Punkte

Ein Quader wird aus Würfeln der Kantenlänge 1 cm aufgebaut. Die Kantenlängen des Quaders (in Zentimetern) sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen, z.B. 2 cm, 3 cm und 4 cm. Die Anzahl benötigter Würfel ist durch 17 teilbar.

- a) Bestimme, aus wie vielen Würfeln der *kleinstmögliche* Quader besteht.

Anzahl Würfel: _____

- b) Wir betrachten nun den *grösstmöglichen* Quader mit den beschriebenen Eigenschaften, für welchen alle Kantenlängen kleiner als 200 cm sind. Dieser Quader wird mit einem Schnitt so halbiert, dass keine Würfel entzwei geschnitten werden. Berechne den Flächeninhalt der Schnittfläche in cm^2 .

Schnittfläche: _____ cm^2

8 Dreieck auf der Karte

4 Punkte

Das unten stehende Koordinatensystem stellt eine nach Norden ausgerichtete Karte dar, d.h. die y -Achse zeigt nach Norden. Im Koordinatensystem ist das Dreieck ABC gegeben (siehe Figur).

- a) Du stehst im Punkt A und schaust Richtung Norden. Nun drehst du dich nach rechts (im Uhrzeigersinn), bis du in Richtung von Punkt C blickst. Bestimme (mit Hilfe einer Messung) den Winkel, um welchen du dich gedreht hast. Gib das Resultat auf *ein* Grad genau an.

Drehwinkel: _____ °

- b) Luca musste zuerst 200 km weit genau westlich, dann 200 km weit genau nördlich fahren, um von zu Hause aus zum Punkt A zu gelangen. Gib die Koordinaten von Lucas Zuhause an.

x-Koordinate: _____

y-Koordinate: _____

- c) Der Punkt D liegt auf der Verlängerung von BA über A hinaus so, dass $\overline{AC} = \overline{AD}$ ist. Weiter beträgt im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ 73.74° . Berechne den Winkel $\delta = \sphericalangle ADC$. (Messungen werden nicht akzeptiert.)

Ö: _____ °

9 Umfang eines Trapezes

3 Punkte

Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$, in welchem AB parallel zu CD ist, mit Hilfe der gegebenen Grössen: $\alpha = 45^\circ$, $\overline{CD} = 7$ cm, Höhe $h = 5$ cm, Flächeninhalt $A_{Trapez} = 57.5$ cm². (Genauigkeit 1 Dezimale)

Skizze (nicht massstabgetreu):

Umfang: _____ cm

10 Rhombus im Rechteck

3 Punkte

In einem Rechteck liegt ein Rhombus (siehe nicht massstabgetreue Figur).

- a) Konstruiere Rechteck und Rhombus aus den vorgegebenen Punkten A , B und E (siehe unten).

- b) Rechteck und Rhombus werden nun an der Diagonalen BD gespiegelt. Die Gesamtfigur, d.h. Rechteck und Rhombus inkl. Spiegelungen, ist also achsensymmetrisch mit Symmetrieachse BD . Untersuche, ob weitere Symmetrien der Gesamtfigur vorliegen, und beschreibe vollständig und genau allfällige weitere Symmetrieeigenschaften.

Figur zum Skizzieren der Spiegelung:

11 Viereck mit Thaleskreis konstruieren

3 Punkte

Von einem Viereck $ABCD$ ist die Lage der Ecken A und B gegeben, wobei die Seite AB 3 cm misst (siehe Figur). Weiter ist bekannt, dass die Seite BC 7 cm, die Seite CD 6 cm und die Winkel $\beta = \sphericalangle CBA$ und $\delta = \sphericalangle ADC$ je 90° messen. Zeichne eine Skizze, *konstruiere* das Viereck $ABCD$ und schreibe dazu einen Konstruktionsbericht.

12 Würfel kippen

2 Punkte

Die Augensumme zweier gegenüberliegender Würfelseiten beträgt immer 7. Der abgebildete Würfel wird entlang des eingezeichneten Weges gekippt.

Startposition und nach der ersten Kippung:

Zeichne die fehlenden Augen in die unten stehenden Würfel ein. (Du darfst auch Zahlen statt Augen auf die Würfelflächen schreiben. Die genaue Position von Zahlen oder Augen innerhalb der Würfelfläche muss nicht beachtet werden.)

Nach zwei weiteren Kippungen und am Ende des Wegs:

Nach zwei weiteren Kippungen: oben: _____

Nach zwei weiteren Kippungen: vorne: _____

Nach zwei weiteren Kippungen: rechts: _____

Am Ende des Wegs: oben: _____

Am Ende des Wegs: vorne: _____

Am Ende des Wegs: rechts: _____

Lösungen

Gymiprüfung 2011 Mathematik (2. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme und kgV

4 Punkte

a) **Ergebnis: 13 800**

- $b = 4.4 \cdot 10^3 = 4400$
- $a \cdot b = (-2) \cdot 4400 = -8800$
- $5000 - (-8800) = 5000 + 8800 = 13\,800$

b) **Ergebnis: 45**

- Ungerade Zahlen unter 20: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.
- Primzahlen streichen (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19). Übrig bleiben 1, 9 und 15 (1 ist keine Primzahl).
- $9 = 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$, also $\text{kgV}(1, 9, 15) = 3^2 \cdot 5 = 45$.

c) **Ergebnis: $2x$**

- Ersten Term vereinfachen: $35x^2 : 7 = 5x^2$, also $\sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{5x^2} = x \cdot \sqrt{25x^2} = x \cdot 5x = 5x^2$.
- Zweiten Term vereinfachen: $2x(x - 3) \cdot 5x + 30x^2 = 10x^2(x - 3) + 30x^2 = 10x^3 - 30x^2 + 30x^2 = 10x^3$.
- Gesuchter Faktor: $10x^3 : 5x^2 = 2x$.
- Genau genommen ist $\sqrt{x^2} = |x|$; dann lautet der Faktor $2|x|$. Für $x > 0$ ist das $2x$.

2 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Ergebnis: $x = 2$

- Mit dem Hauptnenner 28 multiplizieren: $112x - 12(2x - 5) = 49x + 138$
- Klammer auflösen: $112x - 24x + 60 = 49x + 138$
- Zusammenfassen: $88x + 60 = 49x + 138$
- $39x = 78 \Rightarrow x = 2$

3 RadfahrerIn und Durchschnittsgeschwindigkeit

3 Punkte

Ergebnis: $v_2 = 21.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- Erste Teilstrecke: $24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4} \text{ h} = 6 \text{ km}$.
- Ganze Strecke: $6 + 10 = 16 \text{ km}$.
- Gesamtzeit bei $22.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} : \frac{16}{22.5} \text{ h} = \frac{32}{45} \text{ h} = 42\frac{2}{3} \text{ min}$.
- Zeit für die zweite Teilstrecke: $42\frac{2}{3} - 15 = 27\frac{2}{3} \text{ min} = \frac{83}{180} \text{ h}$.
- $v_2 = 10 : \frac{83}{180} = \frac{1800}{83} \approx 21.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4 Geld auf zwei Konten

3 Punkte

Ergebnis: Fr. 7500.– (grösserer Betrag: Fr. 12 000.–)

- Betrag auf dem ersten Konto: x , auf dem anderen: $19\,500 - x$.
- Gleichung: $\frac{3}{4}x = (19\,500 - x) + 1500$
- $\frac{3}{4}x + x = 21\,000 \Rightarrow \frac{7}{4}x = 21\,000 \Rightarrow x = 12\,000$
- Anderes Konto: $19\,500 - 12\,000 = 7500$.
- Probe: $\frac{3}{4} \cdot 12\,000 = 9000 = 7500 + 1500$. Der kleinere Betrag ist Fr. 7500.–.

5 Gefalteter Papierstreifen

3 Punkte

a) Ergebnis: $x = a - c, z = \frac{b}{2}$

- Der Schnitt liegt beim Ende von a . Der Falz liegt in der Mitte von b , denn beim Falten liegt der Teil hinter dem Falz doppelt auf dem Teil davor.
- z ist der Abstand vom Schnitt bis zum Falz, also die halbe Länge von b : $z = \frac{b}{2}$.
- Der zurückgefaltete Teil c liegt auf dem Abschnitt y . Vom Teil a bleibt links davon noch $x = a - y = a - c$ einfach liegen.

b) Ergebnis: $a : b : c = 5 : 2 : 2$

- Setze $z = 1$ Teil. Dann ist $y = 2$ und $x = 3$.
- $c = y = 2, b = 2z = 2, a = x + c = 3 + 2 = 5$.
- Also $a : b : c = 5 : 2 : 2$.



6 Rechteck aus Quadraten

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $45x^2 \text{ cm}^2$

- Unter **B** liegen die vier Quadrate **C**, **D**, **E**, **F** mit Seite x . Seite von **B**: $4x$.
- **A** ist so hoch wie **B** und **C** zusammen: Seite von **A**: $4x + x = 5x$.
- $\overline{PQ} = 5x + 4x = 9x$, $\overline{QR} = 5x$.
- Fläche: $9x \cdot 5x = 45x^2 \text{ cm}^2$.

b) **Ergebnis:** 8 cm

- $\overline{UR} = \overline{PQ} = 9x$. Wegen $3 : 2$ ist $\overline{RS} = \frac{2}{3} \cdot 9x = 6x$.
- Höhe von $PQST$: $5x + 6x = 11x$.
- Fläche: $9x \cdot 11x = 99x^2 = 6336$
- $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$. Die Seite von **C** misst 8 cm.

7 Quader aus Würfeln

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$ Würfel

- Die Würfelzahl ist das Produkt $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$.
- 17 ist eine Primzahl. Das Produkt ist nur durch 17 teilbar, wenn eine der drei Zahlen ein Vielfaches von 17 ist.
- Kleinste Möglichkeit: die grösste Zahl ist 17, also $15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$.

b) **Ergebnis:** $35\,343 \text{ cm}^2$

- Grösstes Vielfaches von 17 unter 200: $11 \cdot 17 = 187$. Grösster Quader: $187 \cdot 188 \cdot 189$.
- Ohne Würfel zu zerschneiden, kann man nur entlang einer geraden Kantenlänge halbieren: das ist 188.
- Die Schnittfläche ist ein Rechteck mit den beiden anderen Kanten: $187 \cdot 189 = 35\,343 \text{ cm}^2$.
- Geschickt: $187 \cdot 189 = (188 - 1)(188 + 1) = 188^2 - 1 = 35\,344 - 1$.

8 Dreieck auf der Karte

4 Punkte

a) **Ergebnis:** 243° (berechnet: 243.43°)

- $A = (13 \mid 6), C = (3 \mid 1)$. Von A nach C geht es 10 km nach Westen und 5 km nach Süden.
- Drehst du dich von Norden im Uhrzeigersinn, kommst du nach 180° bei Süden an. Von Süden musst du noch weiter Richtung Westen drehen.
- Diesen Restwinkel misst du mit dem Geodreieck: etwa 63° (genau 63.43°).
- Gesamt: $180^\circ + 63.43^\circ \approx 243^\circ$.

b) Ergebnis: $(213 \mid -194)$

- Rückwärts von $A = (13 \mid 6)$ aus rechnen.
- 200 km nach Norden rückgängig machen: $y = 6 - 200 = -194$.
- 200 km nach Westen rückgängig machen: $x = 13 + 200 = 213$.
- Lucas Zuhause: $(213 \mid -194)$.

c) Ergebnis: $\delta = 26.565^\circ$

- Dreieck ABC ist gleichschenkelig mit Spitze C . Basiswinkel: $\alpha = (180^\circ - 73.74^\circ) : 2 = 53.13^\circ$.
- D liegt auf der Verlängerung von BA . Der Winkel $\sphericalangle CAD$ ist der Nebenwinkel von α : $180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ$.
- Dreieck ACD ist gleichschenkelig ($\overline{AC} = \overline{AD}$) mit Spitze A . Basiswinkel: $\delta = (180^\circ - 126.87^\circ) : 2 = 26.565^\circ$.

9 Umfang eines Trapezes

3 Punkte

Ergebnis: $u = 36.5$ cm

- Mittellinie: $m = A : h = 57.5 : 5 = 11.5$ cm.
- $m = \frac{a+c}{2}$, also $a = 2 \cdot 11.5 - 7 = 16$ cm.
- Fülle die Höhen von D und C auf AB . Wegen $\alpha = 45^\circ$ ist das linke Stück so lang wie die Höhe: 5 cm. Dann bleiben 7 cm (unter CD) und $16 - 5 - 7 = 4$ cm rechts.
- $d = \overline{AD} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$ cm
- $b = \overline{BC} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$ cm
- $u = 16 + 6.40 + 7 + 7.07 = 36.47 \approx 36.5$ cm

10 Rhombus im Rechteck

3 Punkte

a) **Ergebnis: Rechteck $ABCD$ mit Rhombus $EBFD$, siehe Konstruktion.**

- Im Rhombus $EBFD$ sind alle Seiten gleich lang. Also gilt $\overline{ED} = \overline{EB}$.
- Senkrechte zu AB in A und in B errichten.
- Kreis um E mit Radius $\overline{EB}$ schneidet die Senkrechte in A : das ist D .
- Parallele zu AB durch D schneidet die Senkrechte in B : das ist C .
- F auf DC mit $\overline{DF} = \overline{EB}$ abtragen. Rhombus $EBFD$ einzeichnen.

b) **Ergebnis: Achsensymmetrisch mit Symmetrieachse EF und punkt-/drehsymmetrisch bezüglich Symmetriezentrum M .**

- Die Diagonale BD des Rhombus ist eine Symmetrieachse des Rhombus. Beim Spiegeln an BD geht der Rhombus in sich selbst über. Gespiegelt wird also nur das Rechteck.
- Die andere Diagonale EF des Rhombus steht senkrecht auf BD und geht durch M . Das gespiegelte Rechteck ist das Spiegelbild des Originals auch an EF . Darum ist die Gesamtfigur auch **achsensymmetrisch zur Achse EF** .
- Zwei senkrechte Symmetrieachsen, die sich in M schneiden, ergeben zusätzlich eine **Punktsymmetrie (Drehsymmetrie um 180°) mit Zentrum M** .

11 Viereck mit Thaleskreis konstruieren

3 Punkte

Ergebnis: Konstruktion mit rechtem Winkel in B , Kreis um B (7 cm) und Thaleskreis über AC .

Konstruktionsbericht:

1. Winkel $\beta = 90^\circ$ in B abtragen (Senkrechte b zu AB in B).
2. Kreis $k(B; r = 7 \text{ cm})$ schneidet b in C .
3. Thaleskreis über AC schneidet den Kreis $k(C; r = 6 \text{ cm})$ in D .
4. Ecken A, B, C, D zum Viereck verbinden.

Idee: Weil $\delta = 90^\circ$ ist, liegt D auf dem Thaleskreis über der Strecke AC .

12 Würfel kippen

2 Punkte

Ergebnis: Nach zwei weiteren Kippungen: oben 6, vorne 5, rechts 3. Am Ende des Wegs: oben 3, vorne 6, rechts 5.

- Gegenüberliegend: 1–6, 2–5, 3–4.
- Start: oben 2, vorne 1, rechts 4 (also links 3, hinten 6, unten 5).
- 1. Kippung nach rechts: oben geht nach rechts, links kommt nach oben. Oben 3, vorne 1, rechts 2.
- 2. Kippung nach rechts: oben 5 (vorher links), vorne 1, rechts 3.
- 3. Kippung nach vorne: oben geht nach vorne, hinten kommt nach oben. Oben 6, vorne 5, rechts 3.
- 4. Kippung nach vorne: oben 2, vorne 6, rechts 3.
- Dann dreimal nach rechts: oben 4, rechts 2 $\rightarrow$ oben 5, rechts 4 $\rightarrow$ oben 3, rechts 5. Vorne bleibt 6.

- Am Ende: oben 3, vorne 6, rechts 5.