

Mathematik · 3. Sek

90 Minuten · 12 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt (nicht leistungsfähiger als übliche Sekundarschulrechner)
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Terme und kgV

4 Punkte

- a) Setze im Term $(-a \cdot b^2) - 2'000'000$ für a die Zahl (-2) und für b die Zahl $1.1 \cdot 10^3$ ein und rechne den Term anschliessend aus.

Ergebnis: _____

- b) Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 20 und keine Primzahlen sind.

kgV: _____

- c) Bestimme den Term, mit welchem man $\sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{35x^2} : \sqrt{7}$ multiplizieren muss, um $30x^2 + 2x(x - 3) \cdot 5x$ zu erhalten.

Term: _____

2 Bruchgleichung lösen

2 Punkte

Bestimme die Lösung folgender Gleichung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$4x - \frac{3(2x - 5)}{7} = \frac{7x - \frac{2}{7}}{4} + 5$$

x: _____

3 Durchschnittsgeschwindigkeit Radfahlerin

3 Punkte

Eine Radfahlerin benötigt für den ersten Teil einer Strecke 15 min, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt.

Berechne, wie schnell sie die zweite Teilstrecke von 10 km Länge zurücklegen muss, damit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Strecke $22.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt. Gib dein Resultat in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an. (Genauigkeit: 1 Dezimale)

Geschwindigkeit: _____ km/h

4 Zwei Bankkonten

3 Punkte

Die Summe von Fr. 19 500.– ist auf zwei Bankkonten verteilt. Wird der Betrag, welcher auf dem einen Konto liegt, um 25% vermindert, ist er um Fr. 1000.– kleiner, als wenn der Betrag auf dem anderen Konto um ein Drittel seines Betrags vergrößert wird. Benutze eine Gleichung, um den *kleineren* der beiden Beträge zu berechnen. (Lösungen ohne Gleichungen geben Null Punkte.)

kleinerer Betrag: _____ Fr.

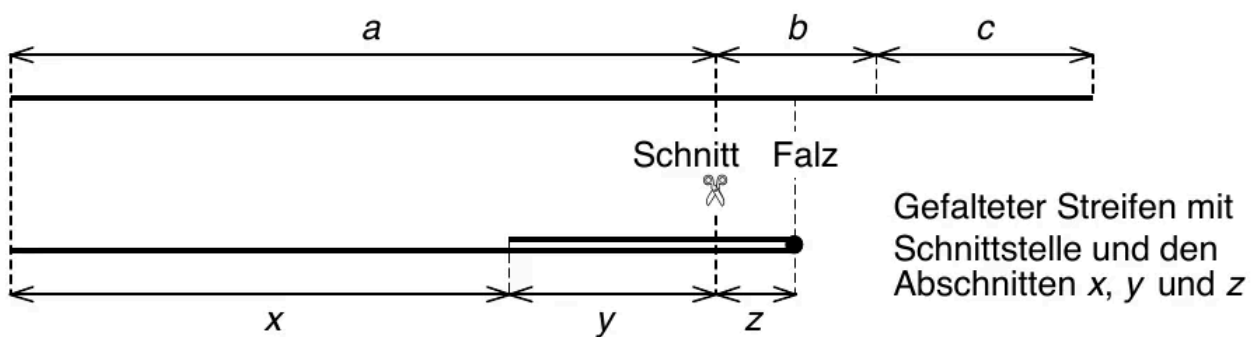
5 Gefalteter Papierstreifen

3 Punkte

Ein Papierstreifen wird ein Mal gefaltet, dann wird durch den gefalteten (doppelten) Streifen geschnitten. So entstehen drei Teile mit Längen a , b bzw. c Zentimeter. Weiter werden gemäss unten stehender Figur die durch Falz und Schnitt entstehenden Abschnitte mit x , y und z bezeichnet.

Ungefalteter Streifen mit Länge $a + b + c$ (oben) und gefalteter Streifen mit Schnittstelle und den Abschnitten x , y und z (unten):

Ungefalteter Streifen mit Länge $a + b + c$



- a) Aus der Figur entnimmt man, dass $y = c$ ist. Schreibe entsprechende Ausdrücke für x und z , wobei in deinem Resultat nur die Variablen a , b und c , nicht aber x , y oder z vorkommen dürfen.

x : _____

z : _____

- b) Bestimme das Verhältnis der Längen der drei Streifenteile $a : b : c$, wenn y doppelt so lang ist wie z , und x dreimal so lang ist wie z (siehe nicht massstabgetreue Figur).

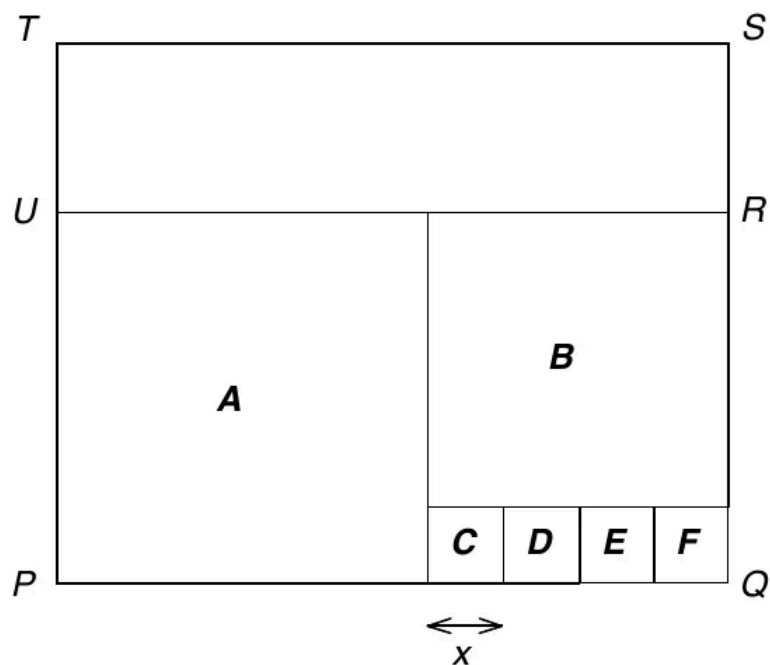
a : b : c: _____

6 Rechteck aus Quadraten

3 Punkte

In folgender nicht massstabgetreuer Figur sind **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** alles Quadrate.

6. In folgender nicht massstabgetreuer Figur sind **A**, **B**, **C**, **D**, **E** und **F** alles Quadrate.



- a) Die Seitenlänge des Quadrats **C** misst x Zentimeter. Drücke den Flächeninhalt des Rechtecks $PQRU$ durch x aus.

Fläche: _____ cm^2

- b) Im Rechteck $URST$ gilt: $\overline{UR} : \overline{RS} = 3 : 2$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $PQST$ beträgt 6336 cm^2 . Bestimme die Länge der Seite des Quadrats **C**.

Seitenlänge von C: _____ cm

7**Quader aus Würfeln**

3 Punkte

Ein Quader wird aus Würfeln der Kantenlänge 1 cm aufgebaut. Die Kantenlängen des Quaders (in Zentimetern) sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen, z.B. 2 cm, 3 cm und 4 cm.

Die Anzahl benötigter Würfel ist durch 17 teilbar.

- a) Bestimme, aus wie vielen Würfeln der *kleinstmögliche* Quader besteht.

Anzahl Würfel: _____

- b) Wir betrachten nun den *grösstmöglichen* Quader mit den beschriebenen Eigenschaften, für welchen alle Kantenlängen kleiner als 200 cm sind. Dieser Quader wird mit einem Schnitt so halbiert, dass keine Würfel entzwei geschnitten werden. Berechne den Flächeninhalt der Schnittfläche in cm^2 .

Schnittfläche: _____ cm^2

8**Dreieck im Koordinatensystem**

4 Punkte

Das unten stehende Koordinatensystem stellt eine nach Norden ausgerichtete Karte dar, d.h. die y -Achse zeigt nach Norden. Im Koordinatensystem ist das Dreieck ABC gegeben (siehe Figur).

- a) Du stehst im Punkt A und schaust Richtung Norden. Nun drehst du dich nach rechts (im Uhrzeigersinn), bis du in Richtung von Punkt C blickst. Bestimme (mit Hilfe einer Messung) den Winkel, um welchen du dich gedreht hast. Gib das Resultat auf *ein* Grad genau an.

Winkel: _____ °

- b) Luca musste zuerst 200 km weit genau westlich, dann 200 km weit genau nördlich fahren, um von zu Hause aus zum Punkt A zu gelangen. Gib die Koordinaten von Lucas Zuhause an.

x-Koordinate: _____ km

y-Koordinate: _____ km

- c) Der Punkt D liegt auf der Verlängerung von BA über A hinaus so, dass $\overline{AC} = \overline{AD}$ ist. Weiter beträgt im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ 73.74° . Berechne den Winkel $\delta = \sphericalangle ADC$. (Messungen werden nicht akzeptiert.)

Ö: _____ °

9 Umfang eines Trapezes

3 Punkte

Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$, in welchem AB parallel zu CD ist, mit Hilfe der gegebenen Grössen: $\alpha = 45^\circ$, $\overline{CD} = 7$ cm, Höhe $h = 5$ cm, Flächeninhalt $A_{Trapez} = 57.5$ cm². (Genauigkeit 1 Dezimale)

Skizze (nicht massstabgetreu):

Umfang: _____ cm

10 Rhombus im Rechteck

3 Punkte

In einem Rechteck liegt ein Rhombus (siehe nicht massstabgetreue Figur).

- a) Konstruiere Rechteck und Rhombus aus den vorgegebenen Punkten A , B und E (siehe unten).

- b) Rechteck und Rhombus werden nun an der Diagonalen BD gespiegelt. Die Gesamtfigur, d.h. Rechteck und Rhombus inkl. Spiegelungen, ist also achsensymmetrisch mit Symmetrieachse BD . Untersuche, ob weitere Symmetrien der Gesamtfigur vorliegen, und beschreibe vollständig und genau allfällige weitere Symmetrieeigenschaften.

Figur zum Skizzieren der Spiegelung:

11 Viereck konstruieren

3 Punkte

Von einem Viereck $ABCD$ ist die Lage der Ecken A und B gegeben, wobei die Seite AB 3 cm misst (siehe Figur). Weiter ist bekannt, dass die Seite BC 7 cm, die Seite CD 6 cm und die Winkel $\beta = \sphericalangle CBA$ und $\delta = \sphericalangle ADC$ je 90° messen. Zeichne eine Skizze, *konstruiere* das Viereck $ABCD$ und schreibe dazu einen Konstruktionsbericht.

12 **Würfel kippen**

2 Punkte

Die Augensumme zweier gegenüberliegender Würfelseiten beträgt immer 7. Der abgebildete Würfel wird entlang des eingezeichneten Weges gekippt.

Startposition (oben) und nach der ersten Kippung (unten):

Zeichne die fehlenden Augen in die unten stehenden Würfel ein. (Du darfst auch Zahlen statt Augen auf die Würfelflächen schreiben. Die genaue Position von Zahlen oder Augen innerhalb der Würfelfläche muss nicht beachtet werden.)

Nach zwei weiteren Kippungen (erste Figur) und am Ende des Wegs (zweite Figur):

Lösungen

Gymiprüfung 2011 Mathematik (3. Sek) Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Terme und kgV

4 Punkte

a) Ergebnis: 420'000

- $b^2 = (1.1 \cdot 10^3)^2 = 1.21 \cdot 10^6 = 1'210'000$
- $-a \cdot b^2 = -(-2) \cdot 1'210'000 = 2'420'000$
- $2'420'000 - 2'000'000 = 420'000$

b) Ergebnis: 45

- Ungerade Zahlen unter 20: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.
- Primzahlen streichen (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19). Es bleiben **1, 9 und 15**.
- $9 = 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$, also $\text{kgV}(1, 9, 15) = 3^2 \cdot 5 = 45$.

c) Ergebnis: $2x$

- Erster Term vereinfachen: $\sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{35x^2} : \sqrt{7} = x \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 35x^2}{7}} = x \cdot \sqrt{25x^2} = 5x^2$
- Zweiter Term ausmultiplizieren: $30x^2 + 2x(x - 3) \cdot 5x = 30x^2 + 10x^2(x - 3) = 30x^2 + 10x^3 - 30x^2 = 10x^3$
- Gesuchter Faktor: $10x^3 : 5x^2 = 2x$

(Ganz genau ist $\sqrt{25x^2} = 5|x|$, also der erste Term $5x|x|$ und der Faktor $2|x|$.)

2 Bruchgleichung lösen

2 Punkte

Ergebnis: $x = 2$

- Mit dem Hauptnenner 28 multiplizieren: $112x - 12(2x - 5) = 7 \left(7x - \frac{2}{7}\right) + 140$
- Klammern auflösen: $112x - 24x + 60 = 49x - 2 + 140$
- Zusammenfassen: $88x + 60 = 49x + 138$
- $39x = 78 \Rightarrow x = 2$

3 Durchschnittsgeschwindigkeit Radfahrer:in

3 Punkte

Ergebnis: $v_2 = 21.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- Erste Teilstrecke: $24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4} \text{ h} = 6 \text{ km}$
- Ganze Strecke: $6 \text{ km} + 10 \text{ km} = 16 \text{ km}$
- Gesamtzeit bei $22.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$: $t = \frac{16}{22.5} \text{ h} = \frac{32}{45} \text{ h}$ (ca. 42.7 min)
- Zeit für die zweite Teilstrecke: $\frac{32}{45} - \frac{1}{4} = \frac{83}{180} \text{ h}$ (ca. 27.7 min)
- $v_2 = 10 : \frac{83}{180} = \frac{1800}{83} \approx 21.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Achtung: Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist *nicht* der Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten. Rechne immer mit Gesamtstrecke und Gesamtzeit.

4 Zwei Bankkonten

3 Punkte

Ergebnis: Fr. 7'500.– (grösserer Betrag: Fr. 12'000.–)

- x = Betrag auf dem ersten Konto (wird um 25 % vermindert), $19'500 - x$ = Betrag auf dem anderen Konto.
- Gleichung: $0.75x = \frac{4}{3}(19'500 - x) - 1000$
- Mal 12: $9x = 16(19'500 - x) - 12'000 = 312'000 - 16x - 12'000$
- $25x = 300'000 \Rightarrow x = 12'000$
- Anderes Konto: $19'500 - 12'000 = 7'500$
- Probe: $0.75 \cdot 12'000 = 9'000$ und $\frac{4}{3} \cdot 7'500 = 10'000$, Differenz 1000 ✓

Der kleinere Betrag ist **Fr. 7'500.–**.

5 Gefalteter Papierstreifen

3 Punkte

a) Ergebnis: $x = a - c, z = \frac{b}{2}$

- Der Schnitt trennt beide Lagen. In der unteren Lage entsteht links das Stück $a = x + y$.
- Rechts vom Schnitt liegt bis zum Falz das Stück z , das umgefaltet doppelt liegt: $b = z + z = 2z$.
- Das Ende des umgefalteten Teils ist $c = y$.
- Also $x = a - y = a - c$ und $z = \frac{b}{2}$.

b) Ergebnis: $a : b : c = 5 : 2 : 2$

- Setze z als Einheit: $y = 2z, x = 3z$.
- $a = x + y = 5z, b = 2z, c = y = 2z$
- $a : b : c = 5z : 2z : 2z = 5 : 2 : 2$

6 Rechteck aus Quadraten

3 Punkte

a) Ergebnis: $45x^2 \text{ cm}^2$

- C, D, E, F haben je Seitenlänge x , zusammen also $4x$. Das ist die Seitenlänge von B: $4x$.
- Quadrat A ist so hoch wie B plus die kleinen Quadrate: $4x + x = 5x$.
- $\overline{PQ} = 5x + 4x = 9x, \overline{QR} = 5x$
- Fläche $PQRU = 9x \cdot 5x = 45x^2$

b) Ergebnis: 8 cm

- $\overline{UR} = \overline{PQ} = 9x$, wegen $3 : 2$ ist $\overline{RS} = 6x$.
- Höhe von $PQST$: $5x + 6x = 11x$
- Fläche: $9x \cdot 11x = 99x^2 = 6336$
- $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$

7 Quader aus Würfeln

3 Punkte

a) Ergebnis: 4'080 Würfel

- Die Anzahl ist $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$. Weil 17 eine Primzahl ist, muss eine der drei Kantenlängen durch 17 teilbar sein.
- Kleinste Möglichkeit: $15 \cdot 16 \cdot 17 = 4'080$

b) Ergebnis: 35'343 cm^2

- Grösstes Vielfaches von 17 unter 200: $17 \cdot 11 = 187$ (204 ist zu gross).
- Grösster Quader: $187 \cdot 188 \cdot 189$
- Ohne Würfel zu zerschneiden, kann man nur eine gerade Kante halbieren: das ist 188.
- Die Schnittfläche ist das Rechteck aus den beiden anderen Kanten: $187 \cdot 189 = 35'343 \text{ cm}^2$

8 Dreieck im Koordinatensystem

4 Punkte

a) Ergebnis: 243.43° (berechnet), gemessen ca. 243°

- Aus der Figur: $A(13/6)$, $C(3/1)$. Von A nach C geht es 10 km nach Westen und 5 km nach Süden.
- Drehung von Norden nach Osten: 90° , nach Süden: 180° .
- Danach drehst du noch von Süden Richtung Westen weiter. Mit dem Geodreieck misst du dort ca. 63° (genau: der Winkel, dessen Tangens $\frac{10}{5} = 2$ ist, 63.43°).
- Total: $180^\circ + 63.43^\circ \approx 243^\circ$

b) Ergebnis: $(213/-194)$

- A hat die Koordinaten $(13/6)$.
- Den Weg rückwärts gehen: 200 km zurück nach Süden und 200 km zurück nach Osten.
- $x = 13 + 200 = 213$, $y = 6 - 200 = -194$

c) Ergebnis: $\delta = 26.565^\circ$

- Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC : $\alpha = \beta = (180^\circ - 73.74^\circ) : 2 = 53.13^\circ$
- D liegt auf der Verlängerung von BA , also ist $\angle CAD$ der Nebenwinkel von α : $180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ$
- Dreieck ACD ist gleichschenkelig ($\overline{AC} = \overline{AD}$), also sind die Winkel bei C und D gleich gross:
- $\delta = (180^\circ - 126.87^\circ) : 2 = 26.565^\circ$

9 Umfang eines Trapezes

3 Punkte

Ergebnis: $u = 36.5$ cm

- Mittellinie: $m = A : h = 57.5 : 5 = 11.5$ cm, also $a + c = 23$ cm und $a = \overline{AB} = 23 - 7 = 16$ cm.
- Fälle die Höhen von D und C auf AB . Weil $\alpha = 45^\circ$, ist das Stück links so lang wie die Höhe: 5 cm. Dann teilt sich AB in $5 + 7 + 4$ cm.
- $d = \overline{AD} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$ cm
- $b = \overline{BC} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$ cm
- $u = 16 + 6.40 + 7 + 7.07 \approx 36.5$ cm

10 Rhombus im Rechteck

3 Punkte

a) **Ergebnis: Konstruktion siehe Lösungsfigur.**

- Der Rhombus ist $EBFD$. Seine Seitenlänge ist $\overline{EB}$, also gilt $\overline{ED} = \overline{EB}$.
- Errichte in A die Senkrechte zu AB .
- Kreis um E mit Radius $\overline{EB}$ schneidet die Senkrechte in D .
- Errichte in B die Senkrechte und ziehe durch D die Parallele zu AB . Ihr Schnittpunkt ist C .
- Trage auf DC von D aus $\overline{EB}$ ab: Das gibt F . Verbinde E, B, F, D zum Rhombus.

b) **Ergebnis: Achsensymmetrisch mit Symmetrieachse EF und punktsymmetrisch (drehsymmetrisch) bezüglich Symmetriezentrum M .**

- Die Diagonale BD des Rhombus ist eine Symmetrieachse. Die andere Diagonale EF steht im Rhombus senkrecht auf BD und geht durch M .
- Die gespiegelte Gesamtfigur ist deshalb auch an EF achsensymmetrisch.
- Zwei senkrechte Symmetrieachsen ergeben zusätzlich Punktsymmetrie (Drehsymmetrie um 180°) bezüglich ihres Schnittpunkts M .

11 Viereck konstruieren

3 Punkte

Ergebnis: Konstruktion siehe Lösungsfigur.

Idee: Weil $\delta = 90^\circ$ ist, liegt D auf dem Thaleskreis über AC .

Konstruktionsbericht: 1. Winkel $\beta = 90^\circ$ in B abtragen (Senkrechte b zu AB in B). 2.

$k(B, r = 7 \text{ cm}) \cap b \rightarrow C$ 3. Thaleskreis über $AC \cap k(C, r = 6 \text{ cm}) \rightarrow D$ 4. Ecken A, B, C, D zum Viereck verbinden.

12 Würfel kippen

2 Punkte

Ergebnis: Nach zwei weiteren Kippungen: vorne 5, oben 6, rechts 3. Am Ende des Wegs: vorne 6, oben 3, rechts 5.

- Start: vorne 1, oben 2, rechts 4. Gegenüber liegen also hinten 6, unten 5, links 3.
- Nach der ersten Kippung nach rechts: vorne 1, oben 3, rechts 2 (links 5, unten 4, hinten 6).
- Kippung nach rechts: oben 5, rechts 3, vorne 1.
- Kippung nach vorne: Die Oberseite kippt nach vorne, die Rückseite nach oben: **vorne 5, oben 6, rechts 3.**
- Kippung nach vorne: vorne 6, oben 2, rechts 3 (links 4, unten 5).
- Drei Kippungen nach rechts: oben wird jeweils die bisherige linke Seite, rechts die bisherige Oberseite. Am Schluss: **vorne 6, oben 3, rechts 5.**