

Mathematik

90 Minuten · 11 Aufgaben · 35 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein

1 Gleichung, Term, Volumeneinheiten

4 Punkte

- a) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung bezüglich $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$.

$$12 - 4 \cdot (8 - x) = 20$$

x: _____

- b) Vereinfache $\frac{x \cdot (4y + 7) - 7 \cdot (x - 4)}{x \cdot (2y - 7) - x \cdot (y - 7) + 7}$ so weit wie möglich und kürze.

Ergebnis: _____

- c) Ordne die vier Grössen 73 cl, 64 cm³, 86 ml und 7.1 dl mit dem Zeichen "<".

Reihenfolge: _____

2 Zahlen, Bruchterme, Einsetzen

3 Punkte

- a) Schreibe die folgende Zahl mit Ziffern: Dreihundertvierundzwanzig Billionen neunzehn Milliarden siebentausendunddrei.

Zahl: _____

- b) Schreibe den Term $\frac{3ab}{21a^2}$ als Bruch mit dem Nenner $7ac$.

Bruch: _____

- c) Setze im Term $12'000 - ab^2$ für a die Zahl (-3.8) und für b die Zahl $1.2 \cdot 10^2$ ein und rechne den Term anschliessend aus.

Wert: _____

3 Kaffeemischung berechnen

4 Punkte

Ein Kaffeehändler in den USA kauft 800 kg Kaffee der Sorte *Arabica* zum Preis von 2'880 Dollar und 1'200 kg der Sorte *Robusta* zum Preis von 5'280 Dollar.

- a) Eine besonders schmackhafte Mischung ergibt sich aus 3 kg der Sorte *Arabica* und 9 kg der Sorte *Robusta*.

Wie teuer wird eine solche Mischung pro Kilogramm?

Preis pro kg: _____ Dollar

- b) Bei einer anderen Mischung werden x kg *Arabica* und 165 kg *Robusta* so zusammengemischt, dass 1 kg dieser Mischung 4.15 Dollar kostet.

Berechne x .

x : _____ kg

4 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{7x}{9} \right) = 5 + \frac{28x - 18}{9}$ bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

x : _____

5 Ortslinien und Quaderschnitt

5 Punkte

- a) Unten sind die Punkte A, B, C und D vorgegeben. Finde mit Hilfe von Konstruktionen alle Punkte P, die weiter weg sind von A als von B, ausserdem zwischen 1.5 cm und 5.0 cm von D entfernt sind, und für die zusätzlich der Winkel APC genau 90° misst. Markiere alle diese Punkte P mit einer Farbe (nicht rot!).

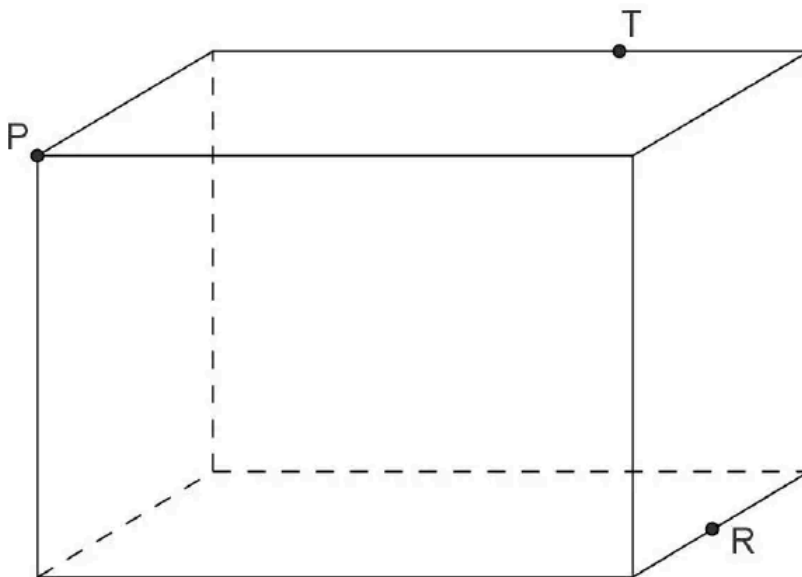
B °

°D

°C

A °

- b) Die Punkte R und T liegen beide je auf einer der Kanten des unten dargestellten Quaders und der Punkt P ist eine seiner Ecken. Eine Ebene, die durch diese drei Punkte gegeben ist, schneidet den Quader. Konstruiere die sich ergebende Schnittfläche.



6 Berührende Kreisbogen im Dreieck

3 Punkte

In jedem Dreieck ABC mit gegebenen Seiten a , b und c lassen sich von den Ecken aus Kreisbogen so zeichnen, dass sich diese Bogen auf den Seiten berühren (siehe Figur).

Beachte, dass die Seite a dem Punkt A und die Seite b dem Punkt B gegenüber liegt.

- a) Drücke $\overline{AV}$ und $\overline{BU}$ je durch einen Term aus, in dem nur a , b und x vorkommen dürfen.

AV: _____

BU: _____

- b) Verwende die in a) gefundenen Zusammenhänge, um eine Gleichung für c aufzustellen und löse diese Gleichung nach x auf.

x: _____

7 Räder und kgV

3 Punkte

Die Vorderräder eines Wagens haben einen Umfang von 231 cm, die Hinterräder einen solchen von 252 cm, und die Räder eines mitgezogenen Anhängers haben einen Umfang von 182 cm. Der Wagen startet und fährt geradeaus.

- a) Wie viele Meter nach dem Beginn der Fahrt berühren alle Räder erstmals gleichzeitig wieder mit denjenigen Radstellen den Boden, mit denen sie ihn beim Beginn der Fahrt

berührt haben?

Strecke: _____ m

- b) Wie oft haben sich die Vorderräder ganz um ihre eigene Achse gedreht, wenn alle Räder zum dritten Mal gleichzeitig wieder mit denjenigen Radstellen den Boden berühren, mit denen sie ihn beim Beginn der Fahrt berührt haben?

Anzahl Umdrehungen: _____

8 Rhombus konstruieren

4 Punkte

Gegeben sind zwei Geraden g und h und ein Punkt P . Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Ecken A und B liegen auf g , und
- P liegt auf der Seite BC , und
- die Diagonale BD ist 5.6 cm lang, und
- die Diagonale AC ist parallel zu h .

Eine Skizze kann dir helfen, sie wird aber nicht bewertet.

Schreibe einen Konstruktionsbericht.

9 Bemalter Würfel zersägt

3 Punkte

Ein Würfel aus Holz wird auf 5 seiner 6 Flächen mit roter Farbe bemalt. Die letzte Fläche wird mit grüner Farbe bemalt. Sobald die Farben trocken sind, wird der ganze Würfel in viele kleinere, gleich grosse Würfelchen zersägt.

- a) Lara zählt alle diese kleinen Würfelchen. Sie ist sich danach aber nur sicher, dass es mehr als 213 und weniger als 220 Stück sind.

Wie viele Würfelchen waren es? Erkläre deine Antwort.

Anzahl Würfelchen: _____

- b) Ein zweiter, gleich bemalter Würfel wird in 125 gleich grosse Würfelchen zersägt.
- Wie viele dieser Würfelchen sind auf keiner Fläche bemalt?
 - Wie viele haben genau zwei bemalte Flächen von verschiedener Farbe, nämlich eine grüne und eine rote?

unbemalt: _____

genau eine grüne und eine rote Fläche: _____

10 Preise zweier Geräte

2 Punkte

Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung. Für Lösungen, die nicht auf einer Gleichung beruhen, gibt es keine Punkte.

Zwei Geräte unterscheiden sich im Preis um Fr. 145.-. Anlässlich einer Verkaufsaktion wird der Preis beider Geräte je um Fr. 60.- reduziert, so dass das eine nun 1.5-mal so teuer ist wie das andere.

Berechne den ursprünglichen Preis des billigeren Geräts.

Ursprünglicher Preis: _____ Fr.

11 Kiesladung aufteilen

2 Punkte

Die Ladung eines mit Kies gefüllten Transportwagens der SBB wird auf drei Lastwagen umgeladen. Der erste Lastwagen übernimmt $\frac{3}{10}$ der Ladung, der zweite $\frac{2}{7}$ der Ladung und der dritte mit 5.8 Tonnen Kies den Rest der Ladung.

Wie viele Tonnen Kies wurden insgesamt umgeladen?

Gesamtladung: _____ t

Lösungen

Gymiprüfung 2012 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gleichung, Term, Volumeneinheiten

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 10$, also $\mathbb{L} = \{10\}$

- Klammer ausmultiplizieren: $12 - 32 + 4x = 20$
- Zusammenfassen: $-20 + 4x = 20$
- $4x = 40$, also $x = 10$
- 10 ist eine ganze Zahl, also $\mathbb{L} = \{10\}$.

b) **Ergebnis:** $\frac{4xy + 28}{xy + 7} = 4$

- Zähler: $4xy + 7x - 7x + 28 = 4xy + 28$
- Nenner: $2xy - 7x - xy + 7x + 7 = xy + 7$
- Im Zähler 4 ausklammern: $\frac{4 \cdot (xy + 7)}{xy + 7}$
- Kürzen: Ergebnis 4.

c) **Ergebnis:** $64 \text{ cm}^3 < 86 \text{ ml} < 7.1 \text{ dl} < 73 \text{ cl}$

Rechne alles in dieselbe Einheit um, z. B. in ml ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$):

- $64 \text{ cm}^3 = 64 \text{ ml}$
- 86 ml
- $7.1 \text{ dl} = 710 \text{ ml}$
- $73 \text{ cl} = 730 \text{ ml}$

Also: $64 \text{ cm}^3 < 86 \text{ ml} < 7.1 \text{ dl} < 73 \text{ cl}$.

2 Zahlen, Bruchterme, Einsetzen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** 324'019'000'007'003

- 1 Billion = 10^{12} , 1 Milliarde = 10^9 .
- Schreibe in Dreiergruppen: Billionen | Milliarden | Millionen | Tausender | Einer
- 324 | 019 | 000 | 007 | 003
- Also 324'019'000'007'003 (keine Millionen, darum 000).

b) **Ergebnis:** $\frac{bc}{7ac}$

- Zuerst kürzen: $\frac{3ab}{21a^2} = \frac{b}{7a}$ (durch $3a$ gekürzt).
- Dann mit c erweitern: $\frac{b \cdot c}{7a \cdot c} = \frac{bc}{7ac}$.

c) **Ergebnis:** $12'000 + 3.8 \cdot 1.44 \cdot 10^4 = 66'720$

- $b = 1.2 \cdot 10^2 = 120$, also $b^2 = 14'400 = 1.44 \cdot 10^4$.
- $a \cdot b^2 = (-3.8) \cdot 14'400 = -54'720$
- $12'000 - (-54'720) = 12'000 + 54'720 = 66'720$

Achtung: Minus mal Minus gibt Plus.

3 Kaffeemischung berechnen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** 4.20 Dollar pro kg

- Preis pro kg Arabica: $2880 : 800 = 3.60$ Dollar
- Preis pro kg Robusta: $5280 : 1200 = 4.40$ Dollar
- Mischung: $\frac{3 \cdot 3.60 + 9 \cdot 4.40}{12} = \frac{10.80 + 39.60}{12} = \frac{50.40}{12} = 4.20$ Dollar pro kg

b) **Ergebnis:** $x = 75$

- Gesamtpreis der Zutaten = Gesamtpreis der Mischung: $3.60x + 4.40 \cdot 165 = 4.15 \cdot (x + 165)$
- $3.60x + 726 = 4.15x + 684.75$
- $726 - 684.75 = 4.15x - 3.60x$
- $41.25 = 0.55x$, also $x = 75$

4 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Ergebnis: $x = \frac{9}{14}$ (oder $x = 0.642857 \dots$)

- Klammer ausmultiplizieren: $\frac{5}{2} + \frac{35x}{9} = 5 + \frac{28x - 18}{9}$
- Mit 18 multiplizieren (kgV der Nenner): $45 + 70x = 90 + 56x - 36$
- $45 + 70x = 54 + 56x$

- $14x = 9$, also $x = \frac{9}{14}$
- $\mathbb{L} = \left\{ \frac{9}{14} \right\}$

5 Ortslinien und Quaderschnitt

5 Punkte

- a) **Ergebnis: Die Punkte P bilden zwei Bogen $\widehat{QR}$ und $\widehat{ST}$ auf dem Thaleskreis über AC.**

Jede Bedingung gibt eine Ortslinie:

- **Weiter weg von A als von B:** Konstruiere die Mittelsenkrechte m von AB. Gesucht ist die Seite von m , auf der B liegt.
- **Zwischen 1.5 cm und 5.0 cm von D:** Zeichne um D einen Kreis mit Radius 1.5 cm und einen mit Radius 5.0 cm. Gesucht ist der Ring dazwischen.
- **Winkel APC = 90°:** P liegt auf dem Thaleskreis über AC (Mittelpunkt M = Mitte von AC, Radius = halbe Strecke AC).

Die gesuchten Punkte sind die Teile des Thaleskreises, die im Ring um D und auf der B-Seite von m liegen. Das sind zwei Bogen: $\widehat{QR}$ und $\widehat{ST}$ (siehe Figur).

- b) **Ergebnis: Die Schnittfläche ist das Fünfeck PQRST.**

Grundidee: Eine Ebene schneidet zwei parallele Quaderflächen in parallelen Geraden.

- P und T liegen beide in der Deckfläche: Verbinde P mit T.
- Die Bodenfläche ist parallel zur Deckfläche: Zeichne durch R die Parallele zu PT. Sie trifft die vordere untere Kante im Punkt Q.
- P und Q liegen in der Vorderfläche: Verbinde P mit Q.

- Die Rückfläche ist parallel zur Vorderfläche: Zeichne durch T die Parallele zu PQ. Sie trifft die hintere rechte senkrechte Kante im Punkt S.
- Verbinde S mit R (rechte Seitenfläche).

Die Schnittfläche ist das Fünfeck PQRST.

6 Berührende Kreisbogen im Dreieck

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $\overline{AV} = b - x$, $\overline{BU} = a - x$

- Der Bogen um C hat den Radius x , also ist auch $\overline{CU} = x$.
- $\overline{AV}$ ist der Rest der Seite $b = \overline{AC}$: $\overline{AV} = b - x$
- $\overline{BU}$ ist der Rest der Seite $a = \overline{BC}$: $\overline{BU} = a - x$

b) **Ergebnis:** $c = b - x + a - x$, **Lösung** $x = \frac{a + b - c}{2}$

- Der Bogen um A hat Radius $\overline{AV}$, also $\overline{AW} = \overline{AV} = b - x$.
- Der Bogen um B hat Radius $\overline{BU}$, also $\overline{BW} = \overline{BU} = a - x$.
- Die Seite c besteht aus diesen zwei Stücken: $c = (b - x) + (a - x)$
- $c = a + b - 2x$, also $2x = a + b - c$ und $x = \frac{a + b - c}{2}$

7 Räder und kgV

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $\text{kgV}(231, 252, 182) = 36'036$; nach 360.36 m

Jedes Rad muss eine ganze Anzahl Umdrehungen gemacht haben. Gesucht ist also das kgV der drei Umfänge.

- $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$
- $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
- $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$
- $\text{kgV} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 36'036 \text{ cm} = 360.36 \text{ m}$

b) **Ergebnis:** $\frac{3 \cdot 360.36 \text{ m}}{2.31 \text{ m}} = 468$; die Vorderräder haben sich 468 Mal gedreht.

- Zum dritten Mal ist das nach $3 \cdot 360.36 \text{ m} = 1081.08 \text{ m}$.
- Ein Vorderrad legt pro Umdrehung 2.31 m zurück.
- $1081.08 : 2.31 = 468$ Umdrehungen

(Kontrolle: $36'036 : 231 = 156$ Umdrehungen pro Mal, $3 \cdot 156 = 468$.)

8

Rhombus konstruieren

4 Punkte

Ergebnis: Rhombus ABCD wie in der Lösungsfigur (Konstruktion mit Konstruktionsbericht).

Wichtige Eigenschaften des Rhombus: Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

- Weil AC parallel zu h ist, steht BD senkrecht zu h.
- AC halbiert den Winkel bei A. Der Winkel zwischen g und AC ist gleich gross wie der Winkel φ zwischen g und h. Also bildet die Seite AD mit g den Winkel 2φ .

Konstruktionsbericht (ein möglicher Weg): 1. Im Schnittpunkt von g und h den Winkel $\varphi = \angle(g, h)$ an h nochmals antragen: Das gibt die Richtung der Seiten AD und BC (Winkel 2φ zu g). 2. Parallele zu dieser Richtung durch P zeichnen. Sie schneidet g im Punkt B. 3. Durch B die Senkrechte zu h zeichnen und darauf 5.6 cm abtragen: Das gibt D. 4. Durch D die Parallele zu BC zeichnen. Sie schneidet g im Punkt A. 5. C liegt auf der Geraden BP, so dass $\overline{BC} = \overline{AB}$ (oder: C als Schnittpunkt der Parallelen zu g durch D mit der Geraden BP).

Andere Wege sind möglich, z. B. die Parallele zu h durch P mit g schneiden (Punkt P_s , Spiegelbild von P an der Diagonale BD), oder auf einer Senkrechten zu h beidseitig 2.8 cm abtragen.

9 Bemalter Würfel zersägt

3 Punkte

a) **Ergebnis: Es muss eine Kubikzahl sein: $6^3 = 216$ Würfelchen.**

- Wird ein Würfel in gleich grosse Würfelchen zersägt, ist jede Kante in gleich viele Teile n geteilt. Die Anzahl ist also n^3 , eine Kubikzahl.
- $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$
- Nur 216 liegt zwischen 213 und 220.

b) **Ergebnis: Unbemalt sind 27 Würfelchen, 12 Würfelchen haben genau eine grüne und eine rote Fläche.**

- $125 = 5^3$: Jede Kante ist in 5 Teile geteilt.
- **Unbemalt** sind die Würfelchen im Innern. Ohne die äussere Schicht bleibt ein Würfel mit Kante $5 - 2 = 3$: $3^3 = 27$.
- **Grün und rot**: Solche Würfelchen liegen an den 4 Kanten, an denen die grüne Fläche an eine rote grenzt. Pro Kante zählen nur die mittleren $5 - 2 = 3$ Würfelchen (die Eckwürfelchen haben 3 bemalte Flächen).
- $4 \cdot 3 = 12$

10 Preise zweier Geräte

2 Punkte

Ergebnis: $(x - 60) \cdot 1.5 = x + 85$, also $x = 350$ Fr.

- Ursprünglicher Preis des billigeren Geräts: x . Das teurere kostet $x + 145$.

- Nach der Reduktion: billiger $x - 60$, teurer $x + 145 - 60 = x + 85$.
- Das teurere ist 1.5-mal so teuer: $(x - 60) \cdot 1.5 = x + 85$
- $1.5x - 90 = x + 85$
- $0.5x = 175$, also $x = 350$

Kontrolle: $290 \cdot 1.5 = 435 = 350 + 85 \checkmark$

11 Kiesladung aufteilen

2 Punkte

Ergebnis: $x = 14 \text{ t}$

- Erster und zweiter Lastwagen zusammen: $\frac{3}{10} + \frac{2}{7} = \frac{21}{70} + \frac{20}{70} = \frac{41}{70}$
- Rest für den dritten: $1 - \frac{41}{70} = \frac{29}{70}$
- $\frac{29}{70}$ der Ladung sind 5.8 t, also $\frac{1}{70}$ sind $5.8 : 29 = 0.2 \text{ t}$.
- Ganze Ladung: $70 \cdot 0.2 = 14 \text{ t}$