

Mathematik

90 Minuten · 10 Aufgaben · 34 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösbar

1 Gleichung, Term, Volumeneinheiten

3 Punkte

a) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung bezüglich $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$:

$$18 - 4 \cdot (2x - 8) = 12x - 5$$

x: _____

b) Vereinfache und kürze den Term so weit wie möglich:

$$\frac{12a \cdot 2b + 4b \cdot (1 - 6a)}{12a + 4b}$$

Term: _____

c) Gib die Summe in Litern (l) an: $1.62 \text{ dl} + 312 \text{ cm}^3 + 1.4 \text{ dm}^3 + 0.825 \text{ l}$

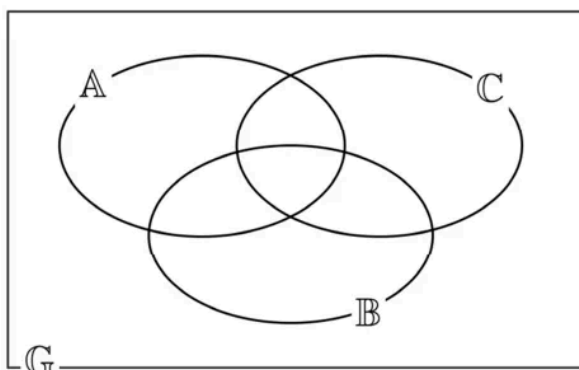
Summe: _____ l

2 Mengen, Quotient, Termwert

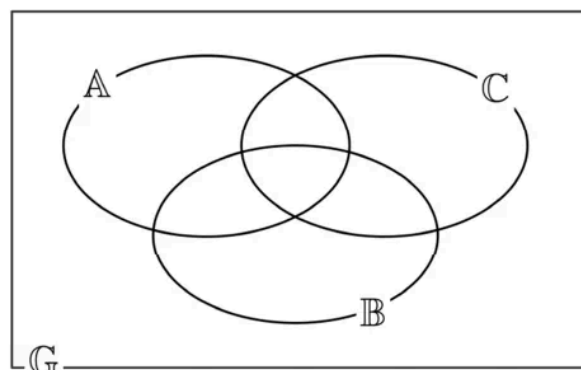
4 Punkte

a) Schraffiere in den untenstehenden Mengendiagrammen farbig:

- links: $(C \cup A) \cap (B \cup A)$
- rechts: $\bar{A} \cap (B \setminus C)$



$$(C \cup A) \cap (B \cup A)$$



$$\bar{A} \cap (B \setminus C)$$

b) Berechne den Quotienten aus dem Produkt von 7.2 und 2.8 und der Differenz von 11.2 und 7.6 .

Quotient: _____

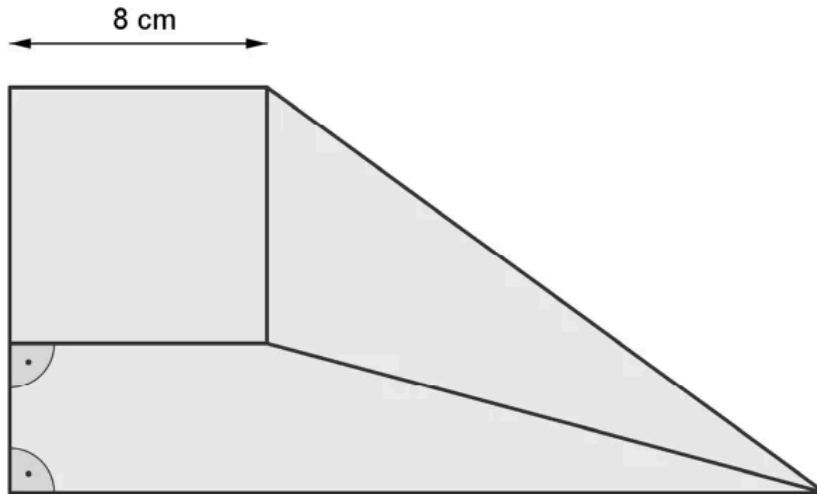
c) Setze im Term $4x^2 - \frac{2y^2}{z}$ für die Variablen $x = \frac{5}{2}$, $y = (-12)$ und $z = (-\frac{2}{3})$ ein und rechne diesen anschliessend aus.

Wert: _____

3 Flächen und Würfeloberfläche

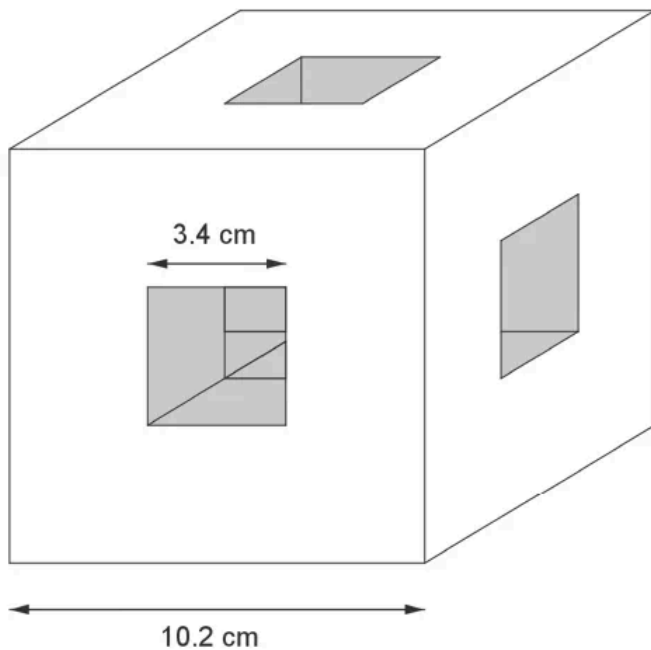
4 Punkte

- a) Das Quadrat, das Dreieck und das rechtwinklige Trapez in der unten skizzierten Figur haben alle den gleich grossen Flächeninhalt. Berechne die Höhe des Trapezes.



Höhe des Trapezes: _____ cm

- b) Aus einem massiven Metallwürfel mit Seitenlänge 10.2 cm werden von jeder Fläche her zentrale Löcher mit einem quadratischen Querschnitt durch den ganzen Würfel hindurch herausgestanzt. Die Seitenlänge der Querschnittsquadrate ist 3.4 cm. Berechne die Gesamtoberfläche des Restkörpers.



Oberfläche: _____ cm^2

4 Räder in der Tiefgarage

3 Punkte

In einer Tiefgarage stehen a Autos, f Fahrräder und m Motorräder.

- a) Gib mit den Variablen a , f und m einen allgemeinen Term an, der die gesamte Anzahl r der Räder (ohne allfällige Ersatzräder) aller Fahrzeuge zusammen angibt.

r : _____

- b) Die Anzahl der Fahrräder ist um 12 kleiner als die Anzahl der Autos, jedoch doppelt so gross wie die Anzahl der Motorräder. Berechne mit Hilfe einer Gleichung die Anzahl f der Fahrräder, wenn du weisst, dass es total 510 Räder sind.

f: _____ Fahrräder

5 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung bezüglich $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{11x}{9} \right) = 3 - \frac{7x - 18}{9} + 5x$$

x: _____

6 Würfelschnitt und Schachtel verschnüren

6 Punkte

a) Rechts ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 6 cm verkleinert dargestellt.

Konstruiere die in diesem Würfel eingezeichnete ebene Schnittfläche PQRS in wahrer Form und Grösse.

Es wird kein Konstruktionsbericht verlangt.

- b) Berechne das Volumen des kleineren der beiden Teilkörper, in die der Würfel durch diesen Schnitt aufgeteilt wird.

Volumen: _____ cm^3

- c) Eine gewöhnliche, quaderförmige Schachtel hat die Kantenlängen 30 cm, 26 cm und 22 cm. Sie soll in der üblichen Weise verschnürt werden. Unten sind zwei von drei verschiedenen Möglichkeiten dargestellt:

Für die Schleife (Mäschli) werden zusätzliche 40 cm Schnur benötigt. Berechne für alle Möglichkeiten, wie lange die Schnur mindestens sein muss.

Grundfläche 30×26 , Höhe 22: _____ cm

Grundfläche 30×22 , Höhe 26: _____ cm

Grundfläche 26×22 , Höhe 30: _____ cm

7 Minigolf mit Bandenschuss

2 Punkte

- a) In der unten wiedergegebenen einfachen, rechteckigen Minigolfbahn soll der Ball B nach dem einmaligen Berühren der Bande a ins Loch L gespielt werden. Konstruiere den Weg des Balles und markiere diesen Weg farbig.
- b) Auch auf der unten wiedergegebenen schwierigeren, siebeneckigen Minigolfbahn soll der Ball B nach dem einmaligen Berühren von genau einer der Banden ins Loch L gespielt werden. Konstruiere alle innerhalb der Minigolfbahn möglichen Wege des Balles und markiere diese Wege mit verschiedenen Farben.

8 kgV und ggT anwenden

4 Punkte

- a) Bestimme die kleinste fünfstellige Zahl, die bei der Division durch 7, 9 und 12 je den Rest 1 ergibt.

Zahl: _____

- b) Drei Stoffbahnen sind 336 dm, 378 dm und 252 dm lang. Sie werden so zerschnitten, dass möglichst grosse, gleich lange Bahnen entstehen und kein Reststück übrig bleibt. Wie lang wird eine solche Stoffbahn? Wie viele Stoffbahnen entstehen?

Länge einer Bahn: _____ dm

Anzahl Bahnen: _____

9 Dreieck aus Höhe und Schwerlinie

3 Punkte

Konstruiere ein Dreieck ABC mit der Seite $c = 6$ cm, der Höhe $h_b = 5$ cm und der Seitenhalbierenden (Schwerlinie) $s_c = 7$ cm. Eine einzige Lösung genügt.

Eine Skizze kann dir helfen, sie wird aber nicht bewertet.

Schreibe einen Konstruktionsbericht.

10 Zahlenschloss am Velo

3 Punkte

Peter hat sein Velo mit einem üblichen Zahlenschloss gesichert, bei welchem er auf drei drehbaren Ringen je eine gewisse Ziffer von 0 bis 9 einstellen muss, damit sich das Schloss öffnet. Leider hat er die drei richtigen Ziffern vergessen!

- a) Um die richtige Einstellung zu finden, will Peter nun alle Möglichkeiten ausprobieren. Für das Überprüfen einer Einstellung braucht er 10 Sekunden. Wie viele Stunden, Minuten und Sekunden würde es dauern, bis Peter alle Möglichkeiten eingestellt hätte?

Stunden: _____ h

Minuten: _____ min

Sekunden: _____ s

- b) Wie viele Einstellungen gibt es insgesamt, in denen nur ungerade Ziffern vorkommen?

Anzahl: _____

- c) Peters Freund Paul ist sicher, dass die erste Ziffer eine 5, die zweite grösser als die erste und die dritte grösser als die zweite war. Gerade Ziffern kann Paul allerdings nicht ausschliessen. Schreibe alle so noch möglichen Einstellungen auf.

Lösungen

Gymiprüfung 2013 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gleichung, Term, Volumeneinheiten

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = \frac{11}{4} = 2.75$

- Klammer ausmultiplizieren: $18 - 8x + 32 = 12x - 5$
- Zusammenfassen: $50 - 8x = 12x - 5$
- $+8x$ und $+5$: $55 = 20x$
- $x = \frac{55}{20} = \frac{11}{4} = 2.75$

b) **Ergebnis:** $\frac{b}{3a+b}$

- Zähler ausmultiplizieren: $24ab + 4b - 24ab = 4b$
- Im Nenner 4 ausklammern: $12a + 4b = 4(3a + b)$
- Kürzen mit 4: $\frac{4b}{4(3a+b)} = \frac{b}{3a+b}$

Achtung: b darfst du nicht weiter kürzen, weil im Nenner eine Summe steht.

c) **Ergebnis:** 2.699 l

Alles in Liter umrechnen ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$, $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$):

- $1.62 \text{ dl} = 0.162 \text{ l}$
- $312 \text{ cm}^3 = 0.312 \text{ l}$
- $1.4 \text{ dm}^3 = 1.4 \text{ l}$
- $0.162 + 0.312 + 1.4 + 0.825 = 2.699 \text{ l}$

2 Mengen, Quotient, Termwert

4 Punkte

a) **Ergebnis:** Links: ganz $\mathbb{A}$ und dazu $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$. Rechts: der Teil von $\mathbb{B}$, der weder in $\mathbb{A}$ noch in $\mathbb{C}$ liegt.

Links: $(\mathbb{C} \cup \mathbb{A}) \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{A})$

- Liegt ein Punkt in $\mathbb{A}$, ist er in beiden Klammern, also ganz $\mathbb{A}$ schraffieren.
- Ausserhalb von $\mathbb{A}$ muss er in $\mathbb{C}$ **und** in $\mathbb{B}$ liegen: zusätzlich die Fläche $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ schraffieren.

Rechts: $\bar{\mathbb{A}} \cap (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$

- $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$: Teil von $\mathbb{B}$ ohne $\mathbb{C}$.
- $\bar{\mathbb{A}}$: davon nur, was nicht in $\mathbb{A}$ liegt.
- Schraffiert wird also nur der Teil von $\mathbb{B}$, der zu keiner der beiden anderen Mengen gehört.

b) **Ergebnis:** 5.6

- Produkt: $7.2 \cdot 2.8 = 20.16$
- Differenz: $11.2 - 7.6 = 3.6$
- Quotient: $\frac{20.16}{3.6} = 5.6$

c) **Ergebnis:** 457

- $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25$
- $\frac{2 \cdot (-12)^2}{-\frac{2}{3}} = \frac{288}{-\frac{2}{3}} = 288 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -432$
- $25 - (-432) = 457$

3 Flächen und Würfeloberfläche

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $h_{\text{Trapez}} = 4 \text{ cm}$

- Quadrat: $8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$. Alle drei Flächen sind also 64 cm^2 .
- Dreieck: Grundseite ist die rechte Quadratseite (8 cm), die Höhe w ist der waagrechte Abstand bis zur Spitze rechts unten: $\frac{8 \cdot w}{2} = 64 \Rightarrow w = 16 \text{ cm}$.
- Trapez: parallele Seiten oben 8 cm, unten $8 + 16 = 24 \text{ cm}$.
- $\frac{8+24}{2} \cdot h = 64 \Rightarrow 16h = 64 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** $A = 832.32 \text{ cm}^2$

Geschickt: $10.2 = 3 \cdot 3.4$. Denk dir den Würfel aus $3 \times 3 \times 3$ kleinen Würfeln mit Kante 3.4 cm und zähle Quadrate der Grösse $(3.4 \text{ cm})^2$.

- Aussenflächen: Jede der 6 Seiten hat $9 - 1 = 8$ Quadrate (das mittlere ist das Loch): $6 \cdot 8 = 48$.
- Innenflächen der Löcher: Die Löcher bilden 6 Gänge von der Seite bis zum Würfelzentrum, jeder Gang hat 4 Wandquadrate: $6 \cdot 4 = 24$. (Im Zentrum treffen sich die Gänge, dort gibt es keine Wand.)
- Total: $48 + 24 = 72$ Quadrate
- $A = 72 \cdot (3.4 \text{ cm})^2 = 72 \cdot 11.56 \text{ cm}^2 = 832.32 \text{ cm}^2$

4 Räder in der Tiefgarage

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $r = 4a + 2f + 2m$ (oder $4a + 2(f + m)$)

- Ein Auto hat 4 Räder: $4a$
- Fahrrad und Motorrad haben je 2 Räder: $2f$ und $2m$
- $r = 4a + 2f + 2m$

b) **Ergebnis:** $f = 66$

- Alles mit f ausdrücken: Autos $a = f + 12$, Motorräder $m = \frac{f}{2}$
- Gleichung: $510 = 4(f + 12) + 2f + 2 \cdot \frac{f}{2}$
- $510 = 4f + 48 + 2f + f = 7f + 48$
- $7f = 462 \Rightarrow f = 66$

(Zur Kontrolle: $a = 78, m = 33, 4 \cdot 78 + 2 \cdot 66 + 2 \cdot 33 = 312 + 132 + 66 = 510$.)

5 Gleichung mit Brüchen

2 Punkte

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{-6.3\}$

- Links ausmultiplizieren: $\frac{3}{2} + \frac{11x}{3} = 3 - \frac{7x-18}{9} + 5x$
- Mit dem Hauptnenner 18 multiplizieren (Klammer um den Bruchzähler beachten!): $27 + 66x = 54 - 2(7x - 18) + 90x$
- $27 + 66x = 54 - 14x + 36 + 90x = 90 + 76x$
- $27 - 90 = 76x - 66x \Rightarrow -63 = 10x$
- $x = -6.3$

a) **Ergebnis:** Rechteck PQRS mit $\overline{PS} = \overline{QR} = 6 \text{ cm}$ und $\overline{RS} = \overline{PQ} \approx 6.62 \text{ cm}$

- PS und QR sind senkrechte Kanten-Parallelen, also je 6 cm lang und senkrecht zu PQ bzw. RS . Die Schnittfläche ist darum ein Rechteck.
- Die wahre Länge von RS findest du in der Deckfläche EFGH: Zeichne das Quadrat $E_0F_0G_0H_0$ (6 cm) in wahrer Grösse, trage $\overline{E_0S_0} = 1.8 \text{ cm}$ und $\overline{R_0G_0} = 1.4 \text{ cm}$ ab und verbinde S_0 mit R_0 .
- Rechnerisch: $\overline{RS} = \sqrt{6^2 + (6 - 1.8 - 1.4)^2} = \sqrt{36 + 2.8^2} = \sqrt{43.84} \approx 6.62 \text{ cm}$.
- In S_0 und R_0 je die Senkrechte zu S_0R_0 errichten und darauf 6 cm abtragen: Das ergibt P_0 und Q_0 . Das Rechteck $S_0R_0Q_0P_0$ ist die Schnittfläche in wahrer Grösse.

b) **Ergebnis:** $V_{\text{Prisma}} = 100.8 \text{ cm}^3$

- Beide Teilkörper sind Prismen mit Höhe 6 cm (die senkrechte Würfelkante).

- Das vordere Prisma hat als Grundfläche das Trapez PBCQ in der Bodenfläche: parallele Seiten $\overline{PB} = 6.0 - 1.8 = 4.2 \text{ cm}$ und $\overline{QC} = 1.4 \text{ cm}$, Trapezhöhe $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$.
- Grundfläche: $\frac{4.2+1.4}{2} \cdot 6 = 16.8 \text{ cm}^2$
- $V = 16.8 \cdot 6 = 100.8 \text{ cm}^3$
- Der andere Teil hat $216 - 100.8 = 115.2 \text{ cm}^3$, also ist 100.8 cm^3 das kleinere Volumen.

c) **Ergebnis: 240 cm, 248 cm und 256 cm (mit Schleife)**

Bei der üblichen Verschnürung läuft die Schnur zweimal rund um die Schachtel (einmal längs, einmal quer). Jede Grundkante kommt so 2-mal vor, die Höhe 4-mal:

$$\text{Länge} = 2 \cdot \text{Länge} + 2 \cdot \text{Breite} + 4 \cdot \text{Höhe} + 40 \text{ cm}$$

Grundfläche	Höhe	ohne Schleife	mit Schleife
30×26	22	$60 + 52 + 88 = 200$	240
30×22	26	$60 + 44 + 104 = 208$	248
26×22	30	$52 + 44 + 120 = 216$	256

(alle Angaben in cm)

7 Minigolf mit Bandenschuss

2 Punkte

a) **Ergebnis: Weg BPL über den Punkt P auf der Bande a**

Idee: Einfallswinkel = Ausfallswinkel. Das erreichst du mit einer Spiegelung.

- Spiegle das Loch L an der Bande a: Bildpunkt L'.
- Verbinde B geradlinig mit L'. Der Schnittpunkt mit der Bande a ist P.
- Der Weg des Balles ist $B \rightarrow P \rightarrow L$.

b) **Ergebnis: Zwei mögliche Wege: BUL und BVL**

Gleiches Vorgehen wie in a), aber für jede Bande einzeln:

- Spiegle L an der Bande (bzw. an ihrer Verlängerung), verbinde B mit dem Spiegelpunkt und prüfe, ob der Schnittpunkt **auf** der Bande liegt und der ganze Weg **innerhalb** der Bahn verläuft.
- Bande unten (rechts von B): Spiegelpunkt L'_1 , Schnittpunkt U. Weg BUL ist möglich.
- Rechte schräge Bande: Spiegelpunkt L'_2 , Schnittpunkt V. Weg BVL ist möglich.
- Bei den anderen Banden (z. B. mit L'_3 und Punkt W oben) verläuft der Weg ausserhalb der Bahn oder trifft die Bande nicht. Diese Wege fallen weg.
- Es gibt also genau zwei Wege: BUL und BVL.

8 kgV und ggT anwenden

4 Punkte

a) **Ergebnis: 10'081**

- Die Zahl minus 1 muss durch 7, 9 und 12 teilbar sein, also ein Vielfaches des kgV.
- $\text{kgV}(7, 9, 12) = 7 \cdot 9 \cdot 4 = 252$
- Kleinstes Vielfaches von 252, das mit +1 fünfstellig ist: $39 \cdot 252 = 9828$ ist zu klein, $40 \cdot 252 = 10'080$

- $10'080 + 1 = 10'081$

b) **Ergebnis: Länge 42 dm, Anzahl $8 + 9 + 6 = 23$ Bahnen**

- Gesucht ist der ggT der drei Längen.
- Primfaktoren: $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$, $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
- $\text{ggT} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, also ist jede Bahn 42 dm lang.
- Anzahl: $336 : 42 = 8$, $378 : 42 = 9$, $252 : 42 = 6$, zusammen 23 Bahnen.

9 Dreieck aus Höhe und Schwerlinie

3 Punkte

Ergebnis: Ein Dreieck, z. B. $\Delta A_1 B_1 C_1$, mit Konstruktionsbericht

Idee: Der Höhenfusspunkt H_b liegt auf dem Thaleskreis über AB (rechter Winkel bei H_b) und hat von B den Abstand h_b . C liegt auf der Geraden AH_b und hat vom Mittelpunkt M_c der Seite c den Abstand s_c .

Konstruktionsbericht:

1. Seite $c = 6$ cm zeichnen: Punkte A und B, dazu den Mittelpunkt M_c von AB .
2. Thaleskreis k_T über AB und Kreis $k_0(B; h_b = 5 \text{ cm})$ zeichnen. Sie schneiden sich im Höhenfusspunkt H_b .
3. Gerade AH_b zeichnen (darauf liegt die Seite b).
4. Kreis $k_1(M_c; s_c = 7 \text{ cm})$ schneidet die Gerade AH_b in C.
5. Dreieck ABC verbinden.

Es gibt mehrere richtige Dreiecke (zwei Schnittpunkte für C, gespiegelte Lagen). Eines davon genügt. Man kann auch mit der Höhe h_b oder einem Streifen im Abstand h_b beginnen.

10 Zahlenschloss am Velo

3 Punkte

a) Ergebnis: 2 h 46 min 40 s

- Möglichkeiten: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (000 bis 999)
- Zeit: $1000 \cdot 10 \text{ s} = 10'000 \text{ s}$
- $10'000 \text{ s} = 166 \text{ min } 40 \text{ s}$ (denn $166 \cdot 60 = 9960$)
- $166 \text{ min} = 2 \text{ h } 46 \text{ min}$
- Ergebnis: 2 h 46 min 40 s

b) Ergebnis: $5^3 = 125$ Möglichkeiten

- Ungerade Ziffern: 1, 3, 5, 7, 9, also 5 pro Ring.
- Drei Ringe: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

c) Ergebnis: 567, 568, 569, 578, 579, 589 (auch richtig in umgekehrter Schreibweise: 765, 865, 965, 875, 975, 985)

Systematisch nach der zweiten Ziffer ordnen (sie muss grösser als 5 sein, die dritte grösser als die zweite):

- zweite Ziffer 6: 567, 568, 569

- zweite Ziffer 7: 578, 579
- zweite Ziffer 8: 589
- zweite Ziffer 9: keine dritte Ziffer möglich

Also 6 Einstellungen: 567, 568, 569, 578, 579, 589.