

Mathematik

12 Aufgaben · 40 Punkte

Name: _____

1 Bruchterme vereinfachen

4 Punkte

a) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\frac{4a + 8}{4} + \frac{2a}{6} - \frac{a - 3}{3}$$

Term: _____

b) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{(3a)^2 + 16a^2}}{2a^2} : \frac{15}{4a}$$

Term: _____

2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) Löse die Gleichung nach x auf.

$$7x - 3(5x - 16) = 104$$

x: _____

- b) Löse die Gleichung nach x auf.

$$3 \cdot \left(x - \frac{5}{18} \right) = \frac{10x - 5}{2}$$

x: _____

3 Autopreise in Prozent

3 Punkte

- a) Ein Auto hat ursprünglich CHF 38 025 gekostet. Nun wird es für CHF 32 500 verkauft. Berechne, wie viel Prozent teurer das Auto vor der Preisreduktion war.

teurer um: _____ %

- b) Der ursprüngliche Preis eines anderen Autos wurde um 32 % erhöht. Danach wurde der neue Preis um 32 % reduziert. Jetzt kostet das Auto CHF 24 684. Berechne den ursprünglichen Preis des Autos.

ursprünglicher Preis: _____ CHF

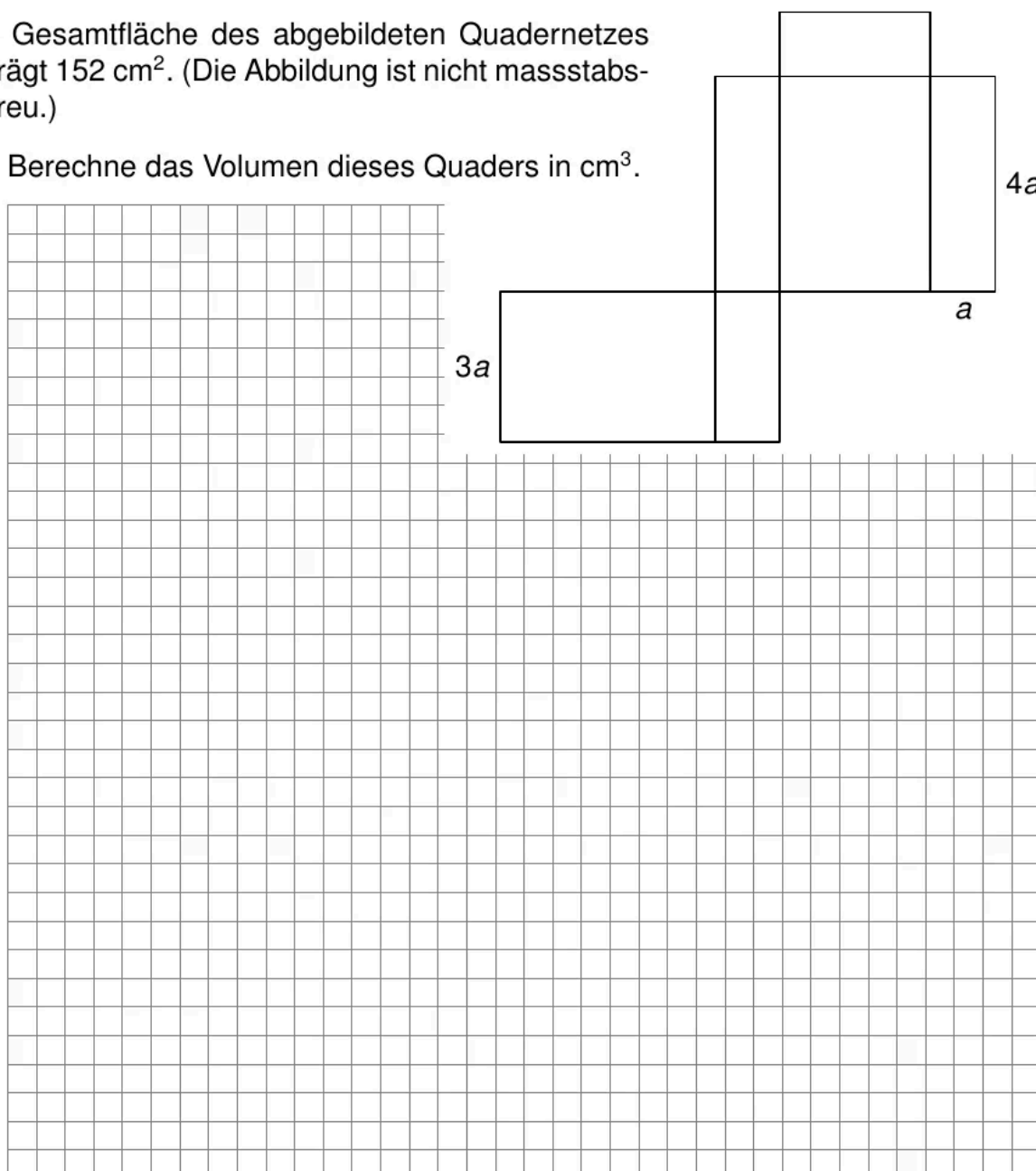
4 Quadernetz und Volumen

4 Punkte

Die Gesamtfläche des abgebildeten Quadernetzes beträgt 152 cm^2 . (Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.)

4. Die Gesamtfläche des abgebildeten Quadernetzes beträgt 152 cm^2 . (Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.)

a) Berechne das Volumen dieses Quaders in cm^3 .



a) Berechne das Volumen dieses Quaders in cm^3 .

Volumen: _____ cm^3

- b) Um welchen Faktor ändert sich das Volumen, wenn die Längen aller Kanten verdoppelt werden?

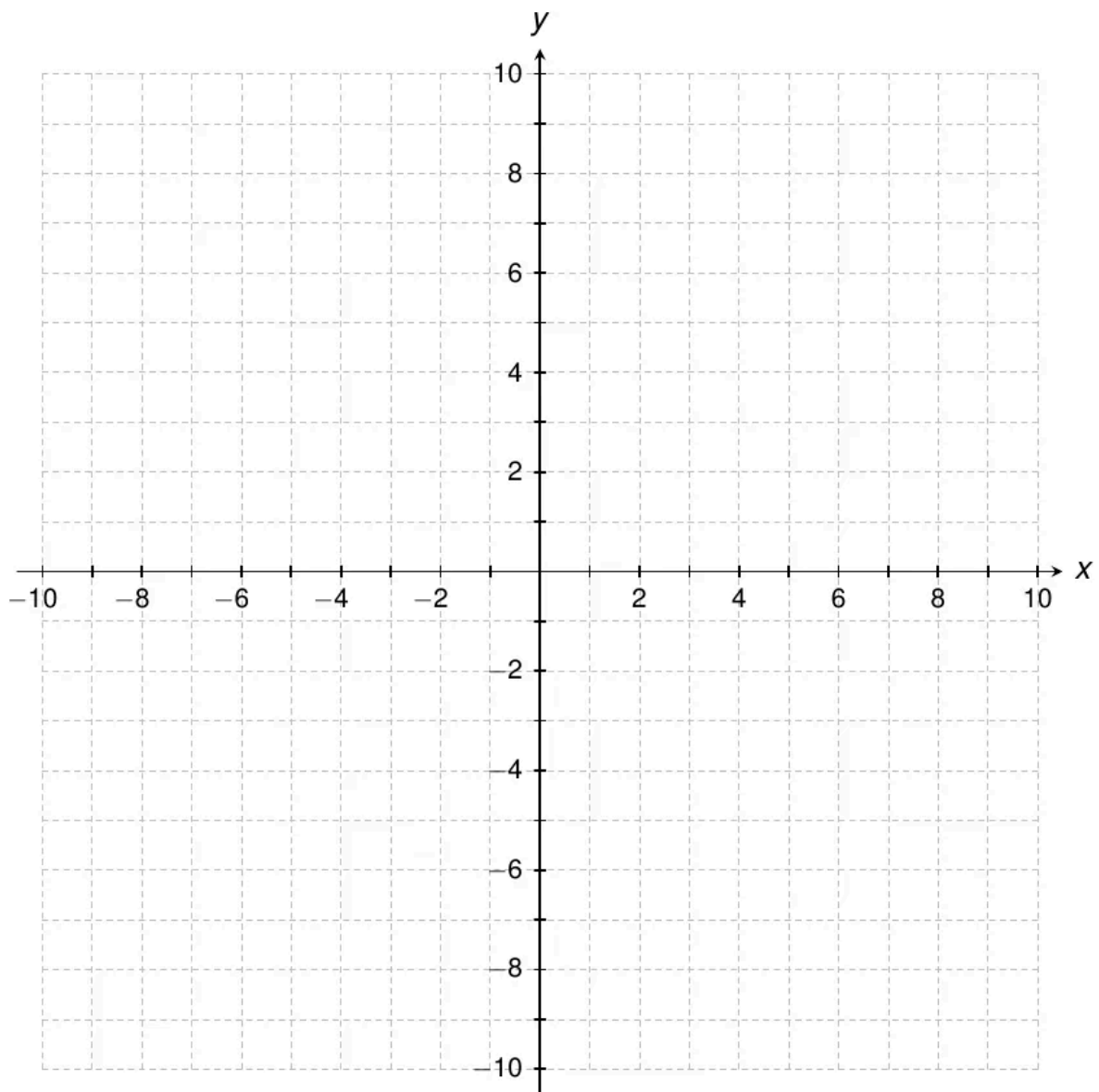
Faktor: _____

5 Abbildungen im Koordinatensystem

4 Punkte

- a) Aus einem Punkt $P(x / y)$ wird der Bildpunkt P' erzeugt, indem P zuerst an der y -Achse gespiegelt und dann um drei Einheiten nach unten verschoben wird. Drücke die Koordinaten von P' durch x und y aus. Du kannst zum Lösen der Aufgabe das abgebildete Koordinatensystem zu Hilfe nehmen. Eine Einheit entspricht einem Häuschen.

$P'(\text{_____} / \text{_____})$



x-Koordinate von P': _____

y-Koordinate von P': _____

- b) Das im Koordinatensystem eingezeichnete Dreieck wird so abgebildet, dass jedem Originalpunkt $P(x / y)$ der Bildpunkt $P'(3x + 1 / 2y)$ zugeordnet wird. Um welchen Faktor ist der Flächeninhalt des Bilddreiecks grösser als der Flächeninhalt des Originaldreiecks?

Faktor: _____

6 Weg-Zeit-Diagramm zeichnen

3 Punkte

Lies zuerst die ganze Beschreibung durch und zeichne dann die beschriebenen Bewegungen ins Diagramm ein. Beschrifte die einzelnen Abschnitte deutlich mit den entsprechenden Buchstaben.

Hannah absolviert ihr Lauftraining. Hier die einzelnen Abschnitte ihrer Bewegung:

- a) Sie startet um 16:00 Uhr beim Schulhaus und erreicht um 16:15 Uhr das Hallenbad.
Dieser Abschnitt ist bereits im Diagramm eingezeichnet.
- b) Dort bleibt sie 5 min lang stehen, um etwas zu verschnauften.
- c) Dann joggt sie *gleich schnell* wie in Abschnitt a) bis zum Fussballplatz.

Elias fährt mit dem Fahrrad.

- d) Er startet nach Hannah und fährt vom Fussballplatz zum Hallenbad. Dabei ist er *doppelt so schnell* unterwegs wie Hannah in den Abschnitten a) und c). Beim Dorfbrunnen überholt er Hannah.

7

Legoteilchen und Tüten wiegen

4 Punkte

Im Legoland kann man Legoteilchen nach Gewicht kaufen. Helena füllt 7 Tüten mit je 500 gleichen Legoteilchen und stellt alles zusammen auf die Waage. Diese zeigt 2023 g an. Eine leere Tüte wiegt 13.45 g mehr als ein Legoteilchen. Berechne, wie viel eine leere Tüte und wie viel ein Legoteilchen wiegen.

(Die volle Punktzahl kannst du nur erzielen, wenn deine Lösung auf einer Gleichung beruht.)

leere Tüte: _____ g

Legeteilchen: _____ g

8 Dreieck im Thaleskreis

3 Punkte

Vom Dreieck ABC kennt man die Höhe $\overline{H_cC} = 30$ cm sowie die Strecke $\overline{H_cM} = 16$ cm. M ist der Kreismittelpunkt. Berechne die Längen der Strecken AB , BC und AC .

AB: _____ cm

BC: _____ cm

AC: _____ cm

9**Graue Dreiecke im Quadrat**

3 Punkte

Unten ist ein Quadrat abgebildet. Berechne die Summe der grauen Flächeninhalte. Entnimm die Masse der Skizze. Die Längen sind in cm angegeben. (Die Skizze ist nicht massstabsgetreu.)

Summe der grauen Flächen: _____ cm^2

10**Spiegelachsen konstruieren**

3 Punkte

Das Dreieck ABC soll so an einer Achse gespiegelt werden, dass die Höhe h'_c des gespiegelten Dreiecks $A'B'C'$ auf die Gerade g zu liegen kommt. Konstruiere alle möglichen Spiegelachsen und spiegle das Dreieck ABC an *einer* dieser Achsen.

- a) Im unten abgebildeten Würfel ist eine Pyramide eingezeichnet. Der Würfel hat eine Kantenlänge von 9 cm. Berechne, welchen Anteil des Würfelvolumens das Volumen der Pyramide ausmacht.

Anteil: _____

- b) In den neun unten abgebildeten Würfeln sind Pyramiden eingezeichnet. Sieben dieser Pyramiden bilden die «Gruppe der Sieben», die sich dadurch auszeichnet, dass alle diese sieben Pyramiden dasselbe Volumen haben. Die zwei restlichen Pyramiden haben ein anderes Volumen. Entscheide für jede Pyramide, ob sie zur «Gruppe der Sieben» gehört oder nicht, und kreuze entsprechend ja oder nein an. Mit M_1 , M_2 , M_3 und M_4 sind Kantenmittelpunkte bezeichnet.

(Bei dieser Aufgabe kannst du nur Punkte erhalten, wenn du bei *jeder* Pyramide *entweder* ja *oder* nein ankreuzt.)

Die Würfel sind zeilenweise von links nach rechts nummeriert: Würfel 1–3 in der oberen Reihe, 4–6 in der mittleren, 7–9 in der unteren.

Würfel 1 (ja / nein): _____

Würfel 2 (ja / nein): _____

Würfel 3 (ja / nein): _____

Würfel 4 (ja / nein): _____

Würfel 5 (ja / nein): _____

Würfel 6 (ja / nein): _____

Würfel 7 (ja / nein): _____

Würfel 8 (ja / nein): _____

Würfel 9 (ja / nein): _____

12 Teilflächen im Dreieck zählen

2 Punkte

Werden in einem Dreieck von zwei Eckpunkten aus je zwei Linien zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen, so zerlegen diese das Dreieck in 9 Teilflächen (vgl. Abbildung).

- a) Wie viele Teilflächen würden entstehen, wenn man von den beiden Ecken aus je vier Linien zu den gegenüberliegenden Seiten ziehen würde?

Anzahl Teilflächen: _____

- b) Wie viele Teilflächen würden entstehen, wenn man von den beiden Ecken aus je n Linien zu den gegenüberliegenden Seiten ziehen würde?

Anzahl Teilflächen: _____

Lösungen

Gymiprüfung 2016 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Bruchterme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $a + 3$

Zerlege jeden Bruch in einfache Teile:

- $\frac{4a+8}{4} = a + 2$
- $\frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$
- $\frac{a-3}{3} = \frac{a}{3} - 1$

Zusammen: $a + 2 + \frac{a}{3} - \frac{a}{3} + 1 = a + 3$.

Achtung beim Minus vor dem Bruch: $-\frac{a-3}{3} = -\frac{a}{3} + 1$.

b) **Ergebnis:** $\frac{2}{3}$

- Unter der Wurzel: $(3a)^2 + 16a^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2$, also $\sqrt{25a^2} = 5a$.
- $\frac{5a}{2a^2} = \frac{5}{2a}$
- Durch einen Bruch teilen heisst mit dem Kehrwert malnehmen: $\frac{5}{2a} \cdot \frac{4a}{15} = \frac{20a}{30a} = \frac{2}{3}$

2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -7$

- Klammer auflösen: $7x - 15x + 48 = 104$
- Zusammenfassen: $-8x + 48 = 104$, also $-8x = 56$
- $x = -7$

b) **Ergebnis:** $x = \frac{5}{6}$

- Klammer auflösen: $3x - \frac{5}{6} = \frac{10x-5}{2}$
- Beide Seiten mal 6: $18x - 5 = 30x - 15$
- $12x = 10$, also $x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

3 Autopreise in Prozent

3 Punkte

a) **Ergebnis:** 17 %

Vergleichsgrösse (100 %) ist hier der neue Preis CHF 32 500, denn gefragt ist, um wie viel der alte Preis *teurer* war.

- $\frac{38\,025}{32\,500} = 1.17$
- $1.17 = 117\%$, also war das Auto 17% teurer.

b) Ergebnis: CHF 27 500

Erhöhen um 32 % heisst mal 1.32, reduzieren um 32 % heisst mal 0.68.

- $x \cdot 1.32 \cdot 0.68 = 24\,684$
- Rückwärts: $24\,684 : 0.68 = 36\,300$ (Preis nach der Erhöhung)
- $36\,300 : 1.32 = 27\,500$

Der ursprüngliche Preis war CHF 27 500. (Die beiden 32 % heben sich *nicht* auf, weil sie sich auf verschiedene Grundwerte beziehen.)

4 Quadernetz und Volumen

4 Punkte

a) Ergebnis: 96 cm^3

Der Quader hat die Kanten a , $3a$ und $4a$.

- Oberfläche: $S = 2 \cdot (a \cdot 3a + 3a \cdot 4a + a \cdot 4a) = 2 \cdot 19a^2 = 38a^2$
- $38a^2 = 152$, also $a^2 = 4$ und $a = 2\text{ cm}$
- Volumen: $V = 4a \cdot 3a \cdot a = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96\text{ cm}^3$

b) Ergebnis: Das Volumen wird um den Faktor 8 vergrössert.

Länge, Breite und Höhe werden je verdoppelt: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Kontrolle: Mit $a = 4$ statt 2 ist $V = 16 \cdot 12 \cdot 4 = 768\text{ cm}^3 = 8 \cdot 96\text{ cm}^3$.

5 Abbildungen im Koordinatensystem

4 Punkte

a) Ergebnis: $P'(-x / y - 3)$

- Spiegeln an der y -Achse: Die x -Koordinate wechselt das Vorzeichen, y bleibt. Du erhältst $P_1(-x / y)$.
- Drei Einheiten nach unten: Von der y -Koordinate 3 abziehen. Du erhältst $P'(-x / y - 3)$.

Probe mit einem Punkt, z. B. $P(2 / 5)$: gespiegelt $(-2 / 5)$, verschoben $(-2 / 2)$.

b) **Ergebnis:** $A_{\text{Bilddreieck}} = 6 \cdot A_{\text{Originaldreieck}}$

Schneller Weg: $x \mapsto 3x + 1$ streckt jede Länge in x -Richtung mit Faktor 3 (das +1 verschiebt nur). $y \mapsto 2y$ streckt in y -Richtung mit Faktor 2. Die Fläche wird also $3 \cdot 2 = 6$ -mal so gross.

Nachrechnen:

- Original: Eckpunkte $(0 / -3), (3 / -3), (2 / 4)$. Grundseite 3, Höhe 7: $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 10.5$
- Bild: $(1 / -6), (10 / -6), (7 / 8)$. Grundseite 9, Höhe 14: $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 14 = 63$
- $63 : 10.5 = 6$

6 Weg-Zeit-Diagramm zeichnen

3 Punkte

Ergebnis: b) waagrecht beim Hallenbad von 16:15 bis 16:20; c) von Hallenbad (16:20) bis Fussballplatz (16:40); d) von Fussballplatz (16:02:30) bis Hallenbad (16:12:30), schneidet a) beim Dorfbrunnen um 16:10.

Lies die Abstände im Diagramm in Häuschen ab: Schulhaus $\rightarrow$ Hallenbad sind 6 Häuschen, Fussballplatz $\rightarrow$ Hallenbad sind 8 Häuschen.

- **Tempo von Hannah:** In a) schafft sie 6 Häuschen in 15 min, also 2 Häuschen pro 5 min.
- **b)** Waagrechte Strecke beim Hallenbad von 16:15 bis 16:20.
- **c)** Gleich steil wie a), aber abwärts: 8 Häuschen bis zum Fussballplatz dauern 20 min. Also von 16:20 (Hallenbad) bis 16:40 (Fussballplatz).
- **d)** Elias ist doppelt so schnell: 4 Häuschen pro 5 min, die Gerade ist doppelt so steil. Er überholt Hannah beim Dorfbrunnen. Dort ist Hannah laut a) um 16:10. Vom Fussballplatz zum Dorfbrunnen sind es 6 Häuschen, dafür braucht Elias 7.5 min. Er startet also um 16:02:30 beim Fussballplatz. Die restlichen 2 Häuschen bis zum Hallenbad braucht er 2.5 min, er kommt um 16:12:30 an.

Zeichne d) als Gerade vom Fussballplatz (16:02:30) durch den Punkt Dorfbrunnen/16:10 bis zum Hallenbad (16:12:30).

7 Legoteilchen und Tüten wiegen

4 Punkte

Ergebnis: Tüte: 14 g, Legoteilchen: 0.55 g

Setze x = Gewicht eines Legoteilchens (in g). Dann wiegt eine leere Tüte $x + 13.45$.

- Eine volle Tüte: $x + 13.45 + 500x = 501x + 13.45$
- Sieben volle Tüten: $7 \cdot (501x + 13.45) = 2023$
- Durch 7 teilen: $501x + 13.45 = 289$
- $501x = 275.55$, also $x = 0.55$

Ein Legoteilchen wiegt 0.55 g, eine leere Tüte $0.55 + 13.45 = 14$ g.

Probe: $14 + 500 \cdot 0.55 = 289$ und $7 \cdot 289 = 2023$.

8 Dreieck im Thaleskreis

3 Punkte

Ergebnis: $\overline{AB} = 68$ cm, $\overline{AC} \approx 34.986$ cm, $\overline{BC} \approx 58.310$ cm

Idee: MC ist ein Radius des Kreises. Im rechtwinkligen Dreieck H_cMC findest du ihn mit Pythagoras.

- $r = \overline{MC} = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = 34$ cm
- $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser: $\overline{AB} = 2 \cdot 34 = 68$ cm
- $\overline{AH_c} = r - \overline{H_cM} = 34 - 16 = 18$ cm

- $\overline{AC} = \sqrt{18^2 + 30^2} = \sqrt{324 + 900} = \sqrt{1224} \approx 34.986 \text{ cm}$
- $\overline{H_c B} = 16 + 34 = 50 \text{ cm}$
- $\overline{BC} = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{2500 + 900} = \sqrt{3400} \approx 58.310 \text{ cm}$

Kontrolle mit dem rechten Winkel bei C (Thaleskreis): $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 1224 + 3400 = 4624 = 68^2$.

9 Graue Dreiecke im Quadrat

3 Punkte

Ergebnis: 73.5 cm^2

Das Quadrat hat die Seitenlänge 12 cm. Alle grauen Flächen sind Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze oben (9 cm vom linken Rand, 3 cm vom rechten Rand). Nimm jeweils die graue Strecke am Rand als Grundseite.

- Linker Rand: 3 Dreiecke mit Grundseite 3 cm, Höhe 9 cm (Abstand der Spitze zum linken Rand): je $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 13.5 \text{ cm}^2$
- Unterer Rand: 2 Dreiecke mit Grundseite 2 cm, Höhe 12 cm: je $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12 \text{ cm}^2$
- Rechter Rand: 1 Dreieck mit Grundseite 6 cm, Höhe 3 cm: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$

Summe: $3 \cdot 13.5 + 2 \cdot 12 + 9 = 40.5 + 24 + 9 = 73.5 \text{ cm}^2$

10 Spiegelachsen konstruieren

3 Punkte

Ergebnis: Es gibt zwei Spiegelachsen: die beiden Winkelhalbierenden a_1 und a_2 der Geraden g und $h = g(C, F)$.

Bei einer Spiegelung wird die Gerade, auf der h_c liegt, auf die Gerade g abgebildet. Eine Achse, die eine Gerade auf eine andere spiegelt, ist eine Winkelhalbierende der beiden Geraden.

1. Verlängere die Höhe h_c zur Geraden $h = g(C, F)$.

2. Schneide h mit g : Schnittpunkt S .
3. Konstruiere die beiden Winkelhalbierenden a_1 und a_2 der Winkel zwischen g und h . Das sind die beiden möglichen Spiegelachsen (sie stehen senkrecht aufeinander).
4. Spiegle A , B und C an einer der Achsen, z. B. an a_1 , und erhalte $A'_1 B'_1 C'_1$. Die neue Höhe $h'_{c,1}$ liegt dann auf g .

a) **Ergebnis:** $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}}$

Die Grundfläche der Pyramide ist ein halbes Würfelquadrat, die Höhe ist eine ganze Würfelkante.

- $V_{\text{Würfel}} = 9^3 = 729 \text{ cm}^3$
- $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot 9 = \frac{1}{6} \cdot 9^3 = 121.5 \text{ cm}^3$

Die Pyramide macht $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens aus.

b) **Ergebnis: ja: Würfel 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 – nein: Würfel 4 und 9**

Für jede Pyramide gilt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Bei Kantenlänge s hat die Pyramide aus a) das Volumen $\frac{1}{6}s^3$, also $G \cdot h = \frac{1}{2}s^3$. Prüfe bei jeder Pyramide, ob Grundfläche mal Höhe gleich $\frac{1}{2}s^3$ ist.

- Würfel 1, 3, 6, 8: Grundfläche und Höhe ergeben ebenfalls $G \cdot h = \frac{1}{2}s^3$, z. B. wie in a) ein halbes Würfelquadrat als Grundfläche ($\frac{1}{2}s^2$) mit Höhe s . → ja
- Würfel 2: Grundfläche die ganze Bodenfläche (s^2), Spitze im Würfelmittelpunkt, Höhe $\frac{1}{2}s$. → ja
- Würfel 5: Grundfläche das Quadrat aus den Kantenmitten M_1 bis M_4 einer Seitenfläche (halbe Fläche, $\frac{1}{2}s^2$), Spitze in der Mitte der gegenüberliegenden Fläche, Höhe s . → ja
- Würfel 7: Grundfläche das Rechteck bis zu den Kantenmitten M_1, M_2 (halbe Seitenfläche), Höhe s . → ja
- Würfel 4 und 9: Die Grundfläche ist eine ganze Seitenfläche (s^2) und die Höhe eine ganze Kante s . Das Volumen ist $\frac{1}{3}s^3$, also doppelt so gross. → nein

12 Teilflächen im Dreieck zählen

2 Punkte

a) Ergebnis: 25 Flächen

Die vier Linien von der ersten Ecke zerlegen das Dreieck in 5 Streifen. Jede der vier Linien von der zweiten Ecke schneidet jeden dieser Streifen, also wird jeder Streifen in 5 Stücke geteilt.

$$5 \cdot 5 = 25$$

Teilflächen.

b) **Ergebnis:** $(n + 1) \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$ **Flächen**
 n

Linien teilen jede Dreiecksseite in $n + 1$ Teilstrecken. Die Anzahl Teilflächen ist das Quadrat davon:

Linien	Teilstrecken pro Seite	Teilflächen
2	3	$3^2 = 9$
3	4	$4^2 = 16$
4	5	$5^2 = 25$
5	6	$6^2 = 36$
n	$n + 1$	$(n + 1)^2$