

Mathematik

90 Minuten · 10 Aufgaben · 41 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Kein zusätzliches Notizpapier
 - Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
 - Nur übliche Sekundarschulrechner erlaubt
-

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) Löse die Gleichung nach x auf.

$$4x - 5(3 - 2x) = 3(4x - 1) + 6x$$

x: _____

b) Löse die Gleichung nach x auf.

$$4x - \frac{2}{3} = 6 \left(x + \frac{5}{9} \right)$$

x: _____

2 Terme vereinfachen und Klammern

4 Punkte

a) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\frac{t-1}{2} : \frac{t}{3} + \frac{3}{t}$$

Vereinfachter Term: _____

- b) Der folgende Term soll ohne Klammern geschrieben werden. Setze dazu jeweils das korrekte Operationszeichen in die entsprechende Lücke.

$$a : (b \cdot (c : d)) - (e - (f + g) + h) = a \text{ ______ } b \text{ ______ } c \text{ ______ } d \text{ ______ } e \text{ ______ } f \text{ ______ } g \text{ ______ }$$

zwischen a und b (+ / - / · / :) : _____

zwischen b und c (+ / - / · / :) : _____

zwischen c und d (+ / - / · / :) : _____

zwischen d und e (+ / - / · / :) : _____

zwischen e und f (+ / - / · / :) : _____

zwischen f und g (+ / - / · / :) : _____

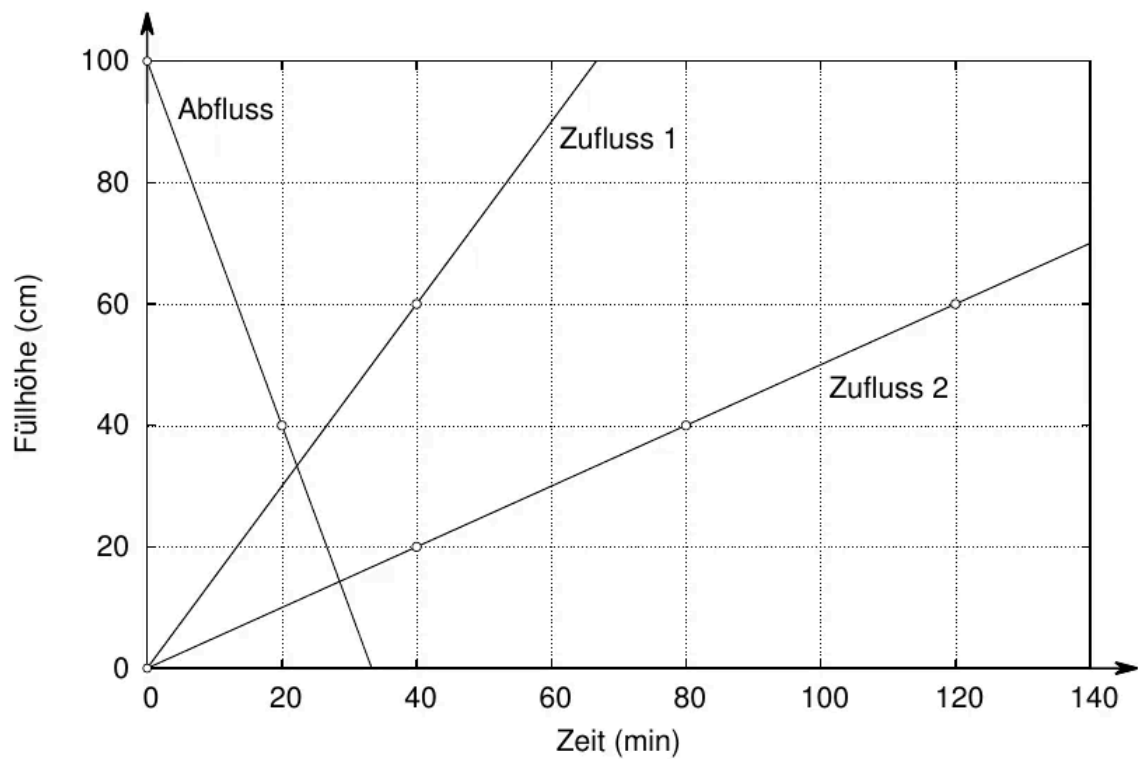
zwischen g und h (+ / - / · / :) : _____

3 Brunnen füllen und leeren

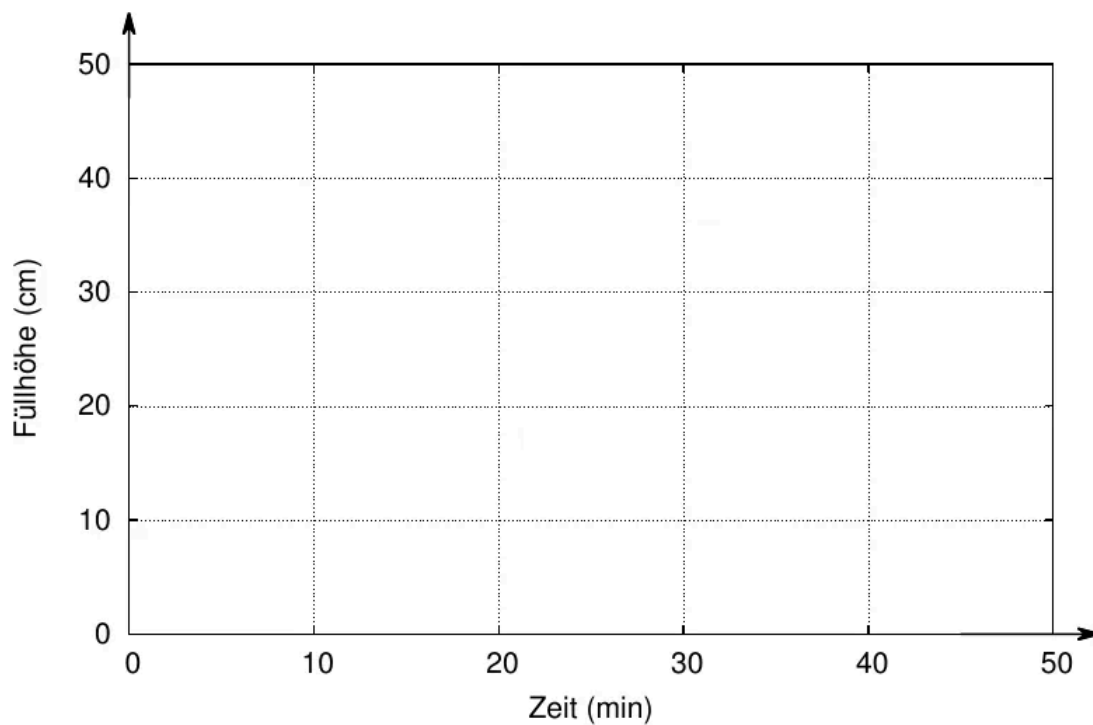
5 Punkte

Ein Brunnen hat zwei Zuflüsse und einen Abfluss. Die Abbildung zeigt für jede der drei Leitungen die Füllhöhe des Brunnens in Abhängigkeit der Zeit, wenn die entsprechende Leitung den Brunnen alleine füllt (Zuflüsse) oder leert (Abfluss).

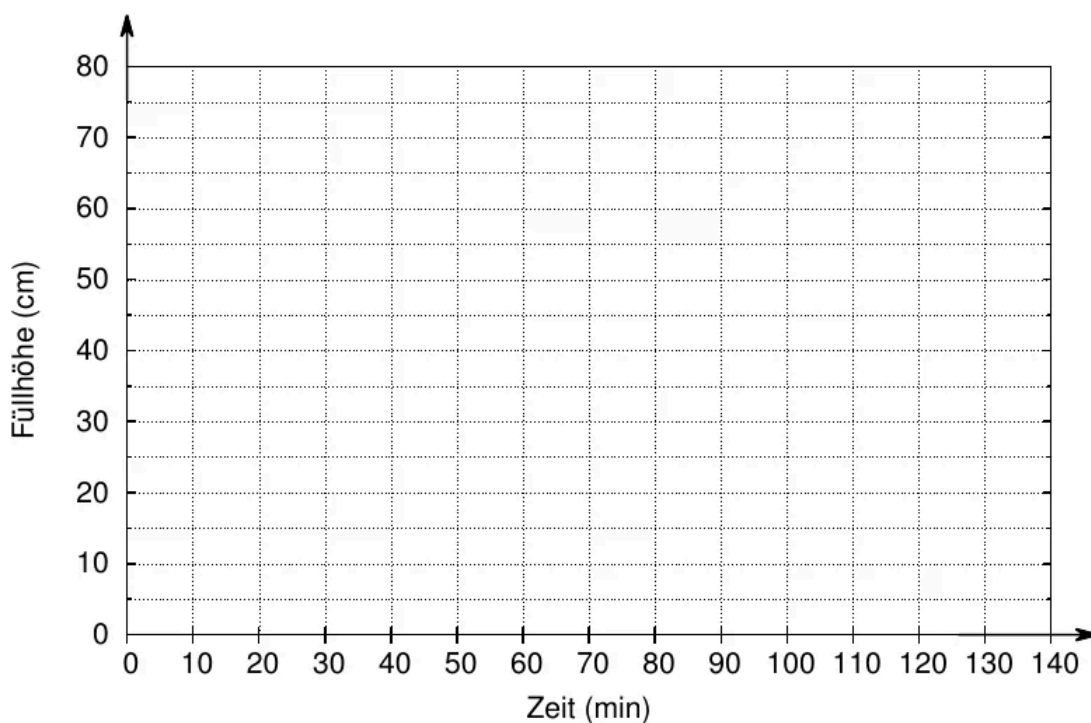
Zeichne für die folgenden Situationen jeweils den entsprechenden Graphen. Beachte dabei die verschiedenen Skalen auf den Achsen. Tipp: Zeichne zuerst mit Bleistift und erst wenn du sicher bist mit Tinte.



- a) Der leere Brunnen wird während 20 Minuten mit Zufluss 1 gefüllt. Dann wird dieser geschlossen und sofort der Abfluss geöffnet.



- b) Der leere Brunnen wird zuerst während 30 Minuten nur mit Zufluss 2 gefüllt. Anschliessend wird er während weiteren 30 Minuten mit beiden Zuflüssen gleichzeitig gefüllt. Zusätzlich zu den beiden Zuflüssen wird schliesslich noch der Abfluss geöffnet (d. h. alle Leitungen sind jetzt offen), und zwar so lange, bis der Brunnen leer ist.



4 Rabatte beim Weinkauf

3 Punkte

Herr Meister kauft an einer Weinausstellung Wein ein. Er erhält auf den angeschriebenen Preis 10 % Ausstellungsrabatt. Weil er ein Freund des Verkäufers ist, reduziert ihm dieser den Rechnungsbetrag (Preis nach Abzug des Rabatts) bei Rotwein um weitere 8 %, bei Weisswein um weitere 6 %.

- a) Das Preisschild einer Kiste Weisswein zeigt CHF 650. Berechne, welchen Betrag Herr Meister schliesslich dafür bezahlen muss.

Betrag: _____ CHF

- b) Für eine Kiste Rotwein zahlt Herr Meister schliesslich CHF 621. Berechne den Preis, der auf dem Preisschild der Kiste steht.

Preis auf dem Preisschild: _____ CHF

5 Zirkus-Eintritte berechnen

4 Punkte

Im Zirkus «Ellbogen» gelten folgende Eintrittspreise:

Kinder bis 12 Jahre	CHF 12
Jugendliche bis 16 Jahre	CHF 16
Erwachsene	CHF 44

Bei einer Zirkusvorstellung waren doppelt so viele Jugendliche wie Kinder anwesend und 28 Erwachsene mehr als Kinder. Alle Anwesenden haben einen Eintritt bezahlt. So ergaben sich für den Zirkus Einnahmen von CHF 5896. Berechne, wie viele Kinder, wie viele Jugendliche und wie viele Erwachsene die Vorstellung besuchten.

Die volle Punktzahl kannst du nur erzielen, wenn deine Lösung auf einer Gleichung beruht.

Kinder: _____

Jugendliche: _____

Erwachsene: _____

6 Wahrscheinlichkeit Partnerarbeit

6 Punkte

In einer Klasse A mögen drei von fünf Schülerinnen das Fach Mathematik. In der Parallelklasse B sind es zwei von drei Schülerinnen. Aus jeder Klasse wird per Zufall je eine Schülerin für eine Partnerarbeit in Mathematik ausgewählt.

(Hinweis: Die Teilaufgabe c) lässt sich unabhängig von den Teilaufgaben a) und b) lösen.)

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide das Fach Mathematik mögen.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine von beiden das Fach Mathematik mag.

Wahrscheinlichkeit: _____

- c) In der Klasse A wechseln zwei Schülerinnen ihre Meinung und mögen Mathematik wegen einer schlechten Prüfung kurzfristig nicht mehr. Nun mag nur noch die Hälfte der Schülerinnen Mathematik. Berechne die Anzahl Schülerinnen in der Klasse A.

Anzahl Schülerinnen: _____

7

Graue Fläche im Quadrat

2 Punkte

Im Quadrat $ABCD$ haben alle grauen Teilflächen *zusammen* einen Flächeninhalt von 28 cm^2 . Die weissen Teilflächen sind vier gleich grosse rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke. Berechne die Länge der Strecke AB .

AB: _____ cm

8 Würfelkörper kippen und drehen

2 Punkte

Betrachte die beiden Abbildungen. Links ist ein Würfelkörper auf einem Tisch liegend abgebildet. Rechts ist die Vorderansicht des Würfelkörpers ohne Tisch als Schrägbild dargestellt.

Der Würfelkörper wird nun zuerst nach links gekippt, anschliessend auf dem Tisch liegend 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht und schliesslich nach vorne gekippt. Zeichne die Vorderansicht des Würfelkörpers als Schrägbild in seiner neuen Lage.

Das Raster links kannst du für Skizzen verwenden. Die *Lösung* zeichnest du ins Raster *rechts*.

9

Zahlenfolgen nach Summenregel

5 Punkte

Für die nachfolgenden Zahlenfolgen gilt die folgende Regel: Die erste und die zweite Zahl werden beliebig gewählt. Jede weitere Zahl ist die Summe der beiden vorangehenden Zahlen.

Beispiel: 2, 5, 7, 12, 19

a) Bestimme die fehlenden Zahlen.

, _____, 17, _____, -78

1. Zahl: _____

2. Zahl: _____

4. Zahl: _____

b) Bestimme die fehlenden Terme.

, $-7a + 3b$, $5a - 2b$, _____, _____

1. Term: _____

4. Term: _____

5. Term: _____

c) Es gilt weiterhin die vorherige Konstruktionsregel. Die vierte Zahl soll 9 sein. Wie können dann die ersten drei Kästchen gefüllt werden, wenn für jedes Kästchen nur die Zahlen

0, 1, 2, 3, 4, ...

zur Verfügung stehen? Gib alle Möglichkeiten an.

(Hinweis: Es hat mehr Zeilen als Lösungen.)

Vorlage (7 Zeilen): _____, _____, _____, 9

10 Trapez im Würfel

6 Punkte

Die Kantenlänge des unten links abgebildeten Würfels beträgt 12 cm. M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte. Unten rechts ist das im Würfel eingezeichnete Trapez in der Zeichenebene liegend dargestellt. Es ist *gleichschenkelig*. Beide Figuren sind nicht massstabsgetreu.

- a) Berechne die Länge des Schenkels AM_1 des grauen Trapezes.

AM_1 : _____ cm

- b) Berechne die Länge der Mittellinie m des grauen Trapezes.

m: _____ cm

c) Berechne den Flächeninhalt des grauen Trapezes.

Flächeninhalt: _____ cm²

Lösungen

Gymiprüfung 2017 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -3$

- Klammern auflösen: $4x - 15 + 10x = 12x - 3 + 6x$
- Zusammenfassen: $14x - 15 = 18x - 3$
- x -Terme nach rechts, Zahlen nach links: $-12 = 4x$, also $4x = -12$
- $x = -3$

b) **Ergebnis:** $x = -2$

- Klammer auflösen: $6 \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$, also $4x - \frac{2}{3} = 6x + \frac{10}{3}$
- x -Terme nach rechts, Brüche nach links: $-\frac{2}{3} - \frac{10}{3} = 2x$, also $2x = -4$
- $x = -2$

Alternative: Zuerst beide Seiten mit 9 multiplizieren: $36x - 6 = 54x + 30$, also $18x = -36$ und $x = -2$.

2 Terme vereinfachen und Klammern

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{3t+3}{2t}$ oder $\frac{3(t+1)}{2t}$ oder $\frac{3}{2} + \frac{3}{2t}$

- Durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren (Punkt vor Strich!): $\frac{t-1}{2} : \frac{t}{3} = \frac{t-1}{2} \cdot \frac{3}{t} = \frac{3t-3}{2t}$
- Zweiten Bruch auf den Nenner $2t$ erweitern: $\frac{3}{t} = \frac{6}{2t}$
- Addieren: $\frac{3t-3}{2t} + \frac{6}{2t} = \frac{3t+3}{2t}$

b) **Ergebnis:** $a : b : c \cdot d - e + f + g - h$

Löse die Klammern von innen nach aussen auf.

- $b \cdot (c : d) = b \cdot c : d$. Durch dieses Produkt teilen heisst: durch b teilen, durch c teilen und mit d multiplizieren (Teilen durch $\frac{c}{d} = \text{Mal } \frac{d}{c}$). Also $a : (b \cdot c : d) = a : b : c \cdot d$.
- $e - (f + g) + h = e - f - g + h$
- Ein Minus vor der Klammer dreht alle Vorzeichen um: $-(e - f - g + h) = -e + f + g - h$

- Zusammen: $a : b : c \cdot d - e + f + g - h$

3 Brunnen füllen und leeren

5 Punkte

a) **Ergebnis: Gerade von (0 | 0) bis (20 | 30), dann Gerade von (20 | 30) bis (30 | 0).**

- Aus der Abbildung: Zufluss 1 füllt 60 cm in 40 min, also 1.5 cm pro Minute. Der Abfluss leert 60 cm in 20 min (von 100 auf 40), also 3 cm pro Minute.
- In 20 Minuten steigt das Wasser um $20 \cdot 1.5 = 30$ cm. Zeichne eine Gerade von (0 | 0) nach (20 | 30).
- Danach sinkt es um 3 cm pro Minute: 30 cm sind nach $30 : 3 = 10$ Minuten weg. Zeichne eine Gerade von (20 | 30) nach (30 | 0).

b) **Ergebnis: Knickpunkte: (0 | 0), (30 | 15), (60 | 75), (135 | 0).**

- Geschwindigkeiten aus der Abbildung: Zufluss 1: +1.5 cm/min, Zufluss 2: +0.5 cm/min (20 cm in 40 min), Abfluss: -3 cm/min.
- 30 min nur Zufluss 2: $30 \cdot 0.5 = 15$ cm → Punkt (30 | 15).
- 30 min beide Zuflüsse: $1.5 + 0.5 = 2$ cm/min, also +60 cm → Punkt (60 | 75).
- Alle Leitungen offen: $1.5 + 0.5 - 3 = -1$ cm/min. 75 cm sind nach 75 min weg → Punkt (135 | 0).
- Verbinde die Punkte mit Geraden.

4 Rabatte beim Weinkauf

3 Punkte

a) Ergebnis: CHF 549.90

Die zwei Rabatte werden nacheinander abgezogen, nicht addiert.

- Nach 10 % Rabatt bleiben 90 %: $650 \cdot 0.9 = 585$
- Nach weiteren 6 % bleiben 94 %: $585 \cdot 0.94 = 549.90$

Kurz: $650 \cdot 0.9 \cdot 0.94 = 549.90$ CHF

b) Ergebnis: CHF 750

Rechne rückwärts: Statt mit dem Faktor zu multiplizieren, teilst du durch ihn.

- CHF 621 sind 92 % des Rechnungsbetrags: $621 : 0.92 = 675$
- CHF 675 sind 90 % des angeschriebenen Preises: $675 : 0.9 = 750$

Kurz: $621 : 0.92 : 0.9 = 750$ CHF

5 Zirkus-Eintritte berechnen

4 Punkte

Ergebnis: 53 Kinder, 106 Jugendliche, 81 Erwachsene

Wähle die Anzahl Kinder als x , weil sich die anderen Gruppen darauf beziehen.

	Anzahl	Preis/Person in CHF	Einnahmen
Kinder	x	12	$12x$
Jugendliche	$2x$	16	$32x$
Erwachsene	$x + 28$	44	$44x + 1232$
Total			5896

- Gleichung: $12x + 16 \cdot 2x + 44 \cdot (x + 28) = 5896$
- $12x + 32x + 44x + 1232 = 5896$
- $88x = 4664$
- $x = 53$

Es sind 53 Kinder, $2 \cdot 53 = 106$ Jugendliche und $53 + 28 = 81$ Erwachsene.

Probe: $53 \cdot 12 + 106 \cdot 16 + 81 \cdot 44 = 636 + 1696 + 3564 = 5896 \checkmark$

6 Wahrscheinlichkeit Partnerarbeit

6 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$

- Wahrscheinlichkeit, dass die Schülerin aus A Mathematik mag: $\frac{3}{5}$. Aus B: $\frac{2}{3}$.
- Beide Ereignisse müssen eintreten, also multiplizieren: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

In der Tabelle sieht man es auch: Von $5 \cdot 3 = 15$ gleich wahrscheinlichen Paaren sind $3 \cdot 2 = 6$ günstig.

b) **Ergebnis:** $\frac{7}{15} = 0.4\bar{6} = 46.\bar{6}\%$

Es gibt zwei Fälle, die du addierst:

- A mag Mathematik, B nicht: $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$
- A mag Mathematik nicht, B schon: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$
- Zusammen: $\frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$

c) **Ergebnis: 20 Schülerinnen**

- Vorher mögen $\frac{3}{5}$ der Klasse Mathematik, nachher $\frac{1}{2}$.
- Der Unterschied: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$
- Dieser Zehntel entspricht den 2 Schülerinnen, die ihre Meinung geändert haben.
- Also hat die Klasse $10 \cdot 2 = 20$ Schülerinnen.

Mit Gleichung (x = Anzahl Schülerinnen): $\frac{3x}{5} - 2 = \frac{x}{2}$, also $\frac{x}{10} = 2$ und $x = 20$.

7 Graue Fläche im Quadrat

2 Punkte

Ergebnis: $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$

Geschickt: Teile das Quadrat in $3 \times 3 = 9$ gleich grosse kleine Quadrate.

- Jedes weisse Dreieck ist ein halbes kleines Quadrat. Die vier weissen Dreiecke ergeben zusammen 2 kleine Quadrate.
- Die graue Fläche besteht also aus $9 - 2 = 7$ kleinen Quadraten.
- 7 kleine Quadrate = 28 cm^2 , also ein kleines Quadrat = 4 cm^2 . Seitenlänge: 2 cm.
- $\overline{AB}$ ist 3 kleine Quadrate lang: $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$.

Ergebnis: Siehe offizielle Lösungsbilder (vier mögliche korrekte Darstellungen).

- Führe die drei Bewegungen einzeln nacheinander aus und skizziere nach jedem Schritt die neue Lage: 1. nach links kippen, 2. auf dem Tisch um 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen (von oben gesehen), 3. nach vorne kippen.
- Hilfreich: Merke dir einen markanten Würfel (z. B. den aufgesetzten Würfel) und verfolge, wohin er bei jedem Schritt wandert.
- Zeichne am Schluss die Vorderansicht als Schrägbild wie im Beispiel rechts: Vorderflächen als Quadrate, Tiefe schräg nach hinten.
- Die offizielle Lösung zeigt vier richtige Schrägbilder. Sie zeigen denselben Körper in derselben Lage, nur mit unterschiedlicher Richtung der schrägen Tiefenkanten.

9 Zahlenfolgen nach Summenregel

5 Punkte

a) Ergebnis: 129, -112, 17, -95, -78

- Die 5. Zahl ist die Summe der 3. und 4.: $17 + (4. \text{ Zahl}) = -78$, also 4. Zahl = $-78 - 17 = -95$.
- Die 4. Zahl ist die Summe der 2. und 3.: $(2. \text{ Zahl}) + 17 = -95$, also 2. Zahl = -112 .
- Die 3. Zahl ist die Summe der 1. und 2.: $(1. \text{ Zahl}) + (-112) = 17$, also 1. Zahl = 129.

b) Ergebnis: $12a - 5b, -7a + 3b, 5a - 2b, -2a + b, 3a - b$

- 1. Term: Er plus der 2. Term ergibt den 3. Term, also 1. Term = $(5a - 2b) - (-7a + 3b) = 5a - 2b + 7a - 3b = 12a - 5b$
- 4. Term = $(-7a + 3b) + (5a - 2b) = -2a + b$
- 5. Term = $(5a - 2b) + (-2a + b) = 3a - b$

c) Ergebnis: 5 Lösungen: 1, 4, 5, 9 · 3, 3, 6, 9 · 5, 2, 7, 9 · 7, 1, 8, 9 · 9, 0, 9, 9

- Nenne die ersten zwei Zahlen a und b . Dann ist die 3. Zahl $a + b$ und die 4. Zahl $b + (a + b) = a + 2b$.
- Also muss gelten: $a + 2b = 9$, mit $a, b \geq 0$ ganzzahlig.
- Probiere alle b durch: $b = 0, 1, 2, 3, 4$ (für $b = 5$ wäre a negativ).

a	b	$a + b$	4. Zahl
9	0	9	9
7	1	8	9
5	2	7	9
3	3	6	9
1	4	5	9

Es gibt genau 5 Möglichkeiten.

10 Trapez im Würfel

6 Punkte

a) Ergebnis: $\overline{AM_1} = \sqrt{180} \approx 13.416 \text{ cm}$

AM_1

liegt in der linken Seitenfläche des Würfels und ist dort die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 12 cm (ganze Kante) und 6 cm (halbe Kante bis zum Mittelpunkt M_1).

$$\overline{AM_1} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} \approx 13.416 \text{ cm}$$

b) **Ergebnis:** $m = \sqrt{162} \approx 12.728 \text{ cm}$

Die Mittellinie ist der Durchschnitt der beiden parallelen Seiten.

- $\overline{AC}$ ist eine Flächendiagonale der Bodenfläche: $\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} = \sqrt{288} \approx 16.971 \text{ cm}$
- $\overline{M_1M_2}$ verbindet zwei Kantenmittelpunkte der Deckfläche: $\overline{M_1M_2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72} \approx 8.485 \text{ cm}$
- $m = \frac{\overline{AC} + \overline{M_1M_2}}{2} \approx \frac{16.971 + 8.485}{2} = \frac{25.456}{2} = 12.728 \text{ cm}$

c) **Ergebnis:** $A = 162 \text{ cm}^2$

Du brauchst die Höhe h des Trapezes. Fülle von M_1 aus das Lot auf AC .

- Weil das Trapez gleichschenkelig ist, steht auf jeder Seite das gleiche Stück x über:
 $x = (\sqrt{288} - \sqrt{72}) : 2 = \sqrt{18} \approx 4.243 \text{ cm}$
- Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse AM_1 : $h = \sqrt{\overline{AM_1}^2 - x^2} = \sqrt{180 - 18} = \sqrt{162} \approx 12.728 \text{ cm}$
- Fläche: $A = m \cdot h = \sqrt{162} \cdot \sqrt{162} = 162 \text{ cm}^2$