

Mathematik

11 Aufgaben · 42 Punkte

Name: _____

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) Löse die Gleichung nach x auf.

$$-10 - 3(4x - 8) = 2(18 - 7x)$$

x: _____

b) Löse die Gleichung nach x auf.

$$\frac{2x + 4}{8} - \frac{x - 4}{6} = 4$$

x: _____

2 Termwerte und Bruchterme

4 Punkte

a) Fülle die Lücken in der Tabelle aus.

x	y	$x - 4y$	$x^2 - 2(y - x)$
4	-2	_____	_____
_____	3	-14	_____

Zeile 1: $x - 4y$: _____

Zeile 1: $x^2 - 2(y - x)$: _____

Zeile 2: x : _____

Zeile 2: $x^2 - 2(y - x)$: _____

b) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\frac{12xy^2}{5y} : \frac{4y}{15} - \frac{2y}{3} \cdot \frac{9x}{4y}$$

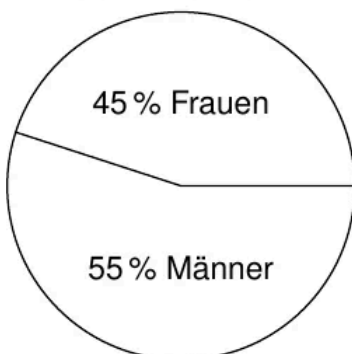
Term: _____

3 Kreisdiagramme Wettbewerb

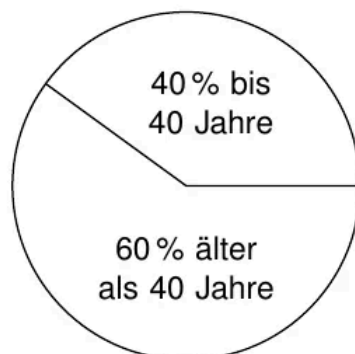
4 Punkte

Die Grafiken unten zeigen eine Auswertung zu den Teilnehmenden an einem Wettbewerb.

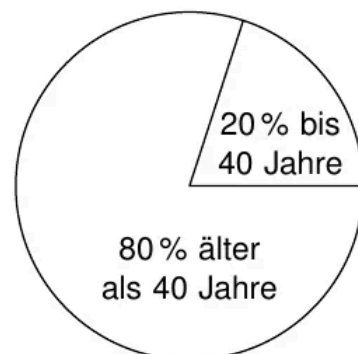
Geschlecht der
Teilnehmenden



Alter der Frauen



Alter der Männer



a) 360 Frauen waren 40 Jahre alt oder jünger. Berechne die Anzahl Männer, die bis 40 Jahre alt sind.

Männer bis 40 Jahre: _____

- b) Berechne den prozentualen Anteil aller Teilnehmenden, die älter als 40 Jahre alt sind.

Anteil: _____ %

4 Gummibärchen von Nora und Mia

4 Punkte

Nora und ihre Schwester Mia sammeln Gummibärchen. Nora erhält dabei 5-mal so viele Gummibärchen wie Mia. Würde Nora 30 Gummibärchen essen und 7 ihrer Schwester schenken, so hätte Nora 3-mal so viele Gummibärchen wie Mia. Berechne, wie viele Gummibärchen jedes der beiden Mädchen gesammelt hat. (Mia isst keine Gummibärchen und verschenkt auch keine.)

Die volle Punktzahl kannst du nur erzielen, wenn deine Lösung auf einer Gleichung beruht.

Mia: _____ Gummibärchen

Nora: _____ Gummibärchen

5 Vielfache und kgV

4 Punkte

- a) Eine Schule plant einen Spielnachmittag. Dafür sollen Gruppen mit jeweils gleich vielen Schülern gebildet werden. Mit 4 Schülern pro Gruppe würde es aufgehen. Ebenso würde es mit 9 Schülern pro Gruppe aufgehen oder mit 14 Schülern pro Gruppe. Wie viele Schüler kann die Schule haben, wenn man weiss, dass es weniger als 1100 sind? Gib alle Möglichkeiten an.

Alle Möglichkeiten: _____

- b) Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 90 und x beträgt 270. Bestimme alle Zahlen, die für x infrage kommen.

Alle Zahlen: _____

6 Kugeln aus der Urne

4 Punkte

In einer Urne liegen 1 grüne, 2 weisse und 3 rote Kugeln.

- a) Du ziehst mit verbundenen Augen eine Kugel und legst sie wieder in die Urne zurück. Dann ziehst du nochmals eine Kugel. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel rot und die andere weiss ist.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) Das Ziehen der zwei Kugeln wurde mehrfach wiederholt. Dabei wurden 493-mal zwei rote Kugeln gezogen. Vier Leute geben eine Schätzung ab, wie oft die Ziehung durchgeführt worden ist. Die Vorschläge sind: 500-mal, 1000-mal, 2000-mal und 2500-mal. Welches ist die beste Schätzung? Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Beste Schätzung (500-mal / 1000-mal / 2000-mal / 2500-mal): _____

7 Dreieck im Koordinatensystem

5 Punkte

Betrachte das im Koordinatensystem abgebildete Dreieck ABC .

Die beiden Teilaufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Berechne die Längen der Seite b und der Höhe h_b .

b : _____

h_b : _____

- b) Gesucht ist ein Punkt D , so dass AD parallel zu BC ist und das Viereck $ABCD$ den Flächeninhalt 57 hat. Berechne die Koordinaten von D . Hinweis: Der Punkt D liegt ausserhalb der Abbildung.

x-Koordinate von D: _____

y-Koordinate von D: _____

8

Schnur im Quadernetz

2 Punkte

Ein quaderförmiges Paket wird wie auf dem Bild dargestellt mit einer Schnur verziert. Dabei wird die Schnur über die Kantenmittelpunkte des Pakets gespannt. Übertrage die Spur der Schnur (ohne Schleife) ins Netz des Quaders.

Hinweis: Das Quadernetz und das Schrägbild sind in unterschiedlichen Massstäben abgebildet.

9 Rechteck punktspiegeln

3 Punkte

Ein Rechteck $ABCD$ wird an einem Zentrum Z punktspiegelt. Dabei entsteht die Bildfigur $A'B'C'D'$. Von der Originalfigur ist bereits die Diagonale BD abgebildet und von der Bildfigur die Diagonale $A'C'$. Konstruiere das Spiegelzentrum Z und ergänze sowohl die Original- als auch die Bildfigur.

Tipp: Ergänze als Denkhilfe zuerst die am unteren Seitenrand abgebildete Skizze.

Skizze:

10 Oktaeder im Würfel

4 Punkte

In einem Würfel mit der Kantenlänge 10 cm spannt man von den Mittelpunkten jeder Seitenfläche einen Draht zu den vier benachbarten Seitenmittelpunkten. Es entsteht ein Oktaeder (eine Doppelpyramide) im Würfel.

- a) Berechne die Länge des Drahtes, der für das Oktaeder benötigt wird.

Drahtlänge: _____ cm

- b) Berechne das Volumen des Oktaeders.

Volumen: _____ cm³

11 Figurenfolge Goldener Drache

4 Punkte

Bei der folgenden Figurenreihe wird jeweils bei der nächsten Figur jede Strecke durch einen «Winkel» aus zwei neuen Strecken ersetzt. Nach mehrfacher Wiederholung entsteht eine Figur, wie du sie ganz unten siehst. Man nennt sie «Goldener Drache».

(Die 1. Figur ist eine einzelne Strecke.)

a) Berechne die Anzahl Strecken der 12. Figur.

Anzahl Strecken: _____

- b) Gib einen Term für die Anzahl Strecken der n . Figur an.

Term: _____

- c) Welche Figur hat als erste mehr als 250 Milliarden Strecken?

Figur Nr.: _____

Lösungen

Gymiprüfung 2018 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 11$

- Klammern auflösen: $-10 - 12x + 24 = 36 - 14x$
- Links zusammenfassen: $14 - 12x = 36 - 14x$
- $+14x$ und -14 auf beiden Seiten: $2x = 22$
- $x = 11$

b) **Ergebnis:** $x = 34$

- Mit dem Hauptnenner 24 multiplizieren: $3(2x + 4) - 4(x - 4) = 96$
 - Achtung beim Minus vor dem Bruch: $6x + 12 - 4x + 16 = 96$
 - Zusammenfassen: $2x + 28 = 96$
 - $2x = 68$, also $x = 34$
-

2 Termwerte und Bruchterme

4 Punkte

a) **Ergebnis:** Zeile 1: 12 und 28; Zeile 2: $x = -2$ und -6

Zeile 1 ($x = 4, y = -2$):

- $x - 4y = 4 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$
- $x^2 - 2(y - x) = 16 - 2 \cdot (-2 - 4) = 16 + 12 = 28$

Zeile 2 ($y = 3$):

- $x - 4 \cdot 3 = -14$, also $x - 12 = -14$ und $x = -2$
- $x^2 - 2(y - x) = (-2)^2 - 2 \cdot (3 + 2) = 4 - 10 = -6$

b) **Ergebnis:** $\frac{15x}{2} = 7.5x$

- Durch einen Bruch teilst du, indem du mit dem Kehrwert multiplizierst: $\frac{12xy^2}{5y} \cdot \frac{15}{4y}$
- Kürzen: $\frac{12xy^2}{5y} = \frac{12xy}{5}$, dann $\frac{12xy}{5} \cdot \frac{15}{4y} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{3}{1} = 9x$
- Zweiter Teil: $\frac{2y}{3} \cdot \frac{9x}{4y} = \frac{18xy}{12y} = \frac{3x}{2}$
- Zusammen: $9x - \frac{3x}{2} = \frac{18x}{2} - \frac{3x}{2} = \frac{15x}{2} = 7.5x$

3 Kreisdigramme Wettbewerb

4 Punkte

a) Ergebnis: 220 Männer

- 40 % der Frauen sind 360 Frauen, also sind 100 % der Frauen $360 : 0.4 = 900$ Frauen.
- Die Frauen machen 45 % aller Teilnehmenden aus: $900 : 0.45 = 2000$ Personen.
- Männer: 55 % von 2000 = 1100 Männer.
- Davon sind 20 % bis 40 Jahre alt: $0.2 \cdot 1100 = 220$ Männer.

Kurz als Gleichung: $0.45 \cdot 0.4 \cdot x = 360$ ergibt $x = 2000$, dann $0.2 \cdot 0.55 \cdot 2000 = 220$.

b) Ergebnis: 71 %

- Frauen über 40: 60 % von 45 %, also $0.6 \cdot 0.45 = 0.27$
- Männer über 40: 80 % von 55 %, also $0.8 \cdot 0.55 = 0.44$
- Zusammen: $0.27 + 0.44 = 0.71 = 71 \%$

Mit den Zahlen aus a) geht es auch: $540 \text{ Frauen} + 880 \text{ Männer} = 1420 \text{ Personen}$, und $1420 : 2000 = 0.71$.

4 Gummibärchen von Nora und Mia

4 Punkte

Ergebnis: Mia: 29 Gummibärchen, Nora: 145 Gummibärchen

- x = Anzahl Gummibärchen von Mia, dann hat Nora $5x$.
- Nachher hat Nora $5x - 30 - 7 = 5x - 37$, Mia hat $x + 7$ (sie bekommt 7 geschenkt).
- Nora hat dann 3-mal so viele wie Mia: $5x - 37 = 3(x + 7)$
- $5x - 37 = 3x + 21$
- $2x = 58$, also $x = 29$
- Mia hat 29, Nora $5 \cdot 29 = 145$ Gummibärchen.

Probe: $145 - 37 = 108$ und $29 + 7 = 36$, und tatsächlich $108 = 3 \cdot 36$.

5 Vielfache und kgV

4 Punkte

a) Ergebnis: 252, 504, 756 und 1008 Schüler

- Die Schülerzahl muss ein gemeinsames Vielfaches von 4, 9 und 14 sein.
- Primfaktoren: $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$

- $\text{kgV}(4, 9, 14) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$
- Vielfache von 252 unter 1100: 252, 504, 756, 1008 (das nächste, 1260, ist zu gross).

b) Ergebnis: 27, 54, 135 und 270

- $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ und $270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- Der dritte Faktor 3 fehlt in 90, also muss er von x kommen: x enthält genau 3-mal den Faktor 3, ist also ein Vielfaches von 27.
- Die Faktoren 2 und 5 darf x höchstens je 1-mal enthalten (sonst wäre das kgV grösser als 270).
- Möglichkeiten: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 27 = 54$, $5 \cdot 27 = 135$, $2 \cdot 5 \cdot 27 = 270$

6 Kugeln aus der Urne

4 Punkte

a) Ergebnis: $\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 33.\overline{3}\%$

- Weil du zurücklegst, gibt es $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Paare (1. Zug, 2. Zug).
- Günstig: zuerst rot, dann weiss: $3 \cdot 2 = 6$ Paare; zuerst weiss, dann rot: $2 \cdot 3 = 6$ Paare.
- $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Oder mit Wahrscheinlichkeiten: $P = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Wichtig: Beide Reihenfolgen zählen.

b) Ergebnis: 2000-mal

- Wahrscheinlichkeit für zweimal rot: $P = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (oder $\frac{9}{36}$).
- Also sind etwa 25 % aller Ziehungen «zweimal rot»: $25\% \hat{=} 493$

- $100\% \hat{=} 4 \cdot 493 = 1972$
- 1972 liegt am nächsten bei 2000. Die beste Schätzung ist 2000-mal.

7 Dreieck im Koordinatensystem

5 Punkte

a) **Ergebnis:** $b = 10, h_b = 3$

Aus der Abbildung: $A(2|1), B(8|4), C(8|9)$.

- Seite $b = \overline{AC}$: 6 nach rechts und 8 nach oben, also mit Pythagoras $b = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
- Geschickt: Die Seite $\overline{BC}$ ist senkrecht, $\overline{BC} = 9 - 4 = 5$. Die zugehörige Höhe h_a ist der waagrechte Abstand von A zur Geraden $x = 8$, also $h_a = 6$.
- Fläche: $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$
- Dieselbe Fläche mit Seite b : $15 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_b = 5 \cdot h_b$, also $h_b = 3$

b) **Ergebnis:** $D(2|15)$

- BC ist senkrecht, also ist auch AD senkrecht: D liegt direkt über A , hat also die x-Koordinate 2.
- $ABCD$ ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC} = 5$ und der Höhe 6 (Abstand der Geraden $x = 2$ und $x = 8$).
- $57 = \frac{\overline{AD} + 5}{2} \cdot 6$, also $19 = \overline{AD} + 5$ und $\overline{AD} = 14$
- D liegt 14 über $A(2|1)$: $D(2|15)$

8

2 Punkte

Schnur im Quadernetz

Ergebnis: Siehe Abbildung.

- Orientiere dich an den Ecken A, B, C, D , die im Schrägbild und im Netz beschriftet sind. So findest du heraus, welche Fläche im Netz welcher Fläche am Paket entspricht.
- Gehe die Schnur Stück für Stück durch: Jedes gerade Stück liegt auf einer Fläche und verbindet zwei Kantenmittelpunkte (oder läuft über eine Fläche von einem Kantenmittelpunkt zum gegenüberliegenden).
- Markiere im Netz diese Kantenmittelpunkte und verbinde sie auf der richtigen Fläche. Achtung: Kanten, die im Netz getrennt liegen, gehören am Paket oft zusammen. Dort muss die Spur nahtlos weiterlaufen.
- Zur Kontrolle: Die Spur ist ein geschlossener Weg; auf der Fläche mit den Ecken A, B, C, D verlaufen zwei parallele schräge Stücke.

9

Rechteck punktspiegeln

3 Punkte

Ergebnis: Siehe Abbildung.

- In einem Rechteck halbieren sich die Diagonalen und sind gleich lang. Der Mittelpunkt M von BD ist also auch der Mittelpunkt von AC .
- Bei der Punktspiegelung wird M auf den Mittelpunkt M' von $A'C'$ abgebildet.
- Konstruiere M (Mittelpunkt von BD) und M' (Mittelpunkt von $A'C'$). Das Zentrum Z ist der Mittelpunkt der Strecke MM' .

- Spiegle A' und C' an Z : Gerade durch den Punkt und Z ziehen, gleiche Länge auf der anderen Seite abtragen. So erhältst du A und C .
- Spiegle ebenso B und D an Z und erhältst B' und D' .
- Verbinde A, B, C, D und A', B', C', D' zu den beiden Rechtecken.

10 Oktaeder im Würfel

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $60 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 84.85 \text{ cm}$

- Eine Oktaederkante s verbindet zwei benachbarte Flächenmittelpunkte. Von der Seite gesehen ist sie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit zwei Katheten von je 5 cm (halbe Würfelkante).
- $s = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7.07 \text{ cm}$
- Ein Oktaeder hat 12 Kanten: $l = 12 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 60 \cdot \sqrt{2} \approx 84.85 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** $166\frac{2}{3} \text{ cm}^3 = 166.\overline{6} \text{ cm}^3$

- Das Oktaeder besteht aus zwei gleichen Pyramiden mit quadratischer Grundfläche in der Würfelmitte.
- Die Grundfläche ist das Quadrat, dessen Ecken die Seitenmitten des Würfelquerschnitts sind. Es ist genau halb so gross wie der Querschnitt: $G = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50 \text{ cm}^2$
- Höhe einer Pyramide: halbe Würfelkante, $h = 5 \text{ cm}$
- $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5 = \frac{500}{3} \text{ cm}^3 = 166\frac{2}{3} \text{ cm}^3$

Merke: Das Oktaeder füllt genau $\frac{1}{6}$ des Würfels, $\frac{1}{6} \cdot 10^3 = 166.\overline{6} \text{ cm}^3$.

11

Figurenfolge Goldener Drache

4 Punkte

a) **Ergebnis: 2048**

- Jede Strecke wird durch 2 neue ersetzt, die Anzahl verdoppelt sich also von Figur zu Figur: 1, 2, 4, 8, 16, ...
- Von der 1. bis zur 12. Figur wird 11-mal verdoppelt: $2^{11} = 2048$

b) **Ergebnis:** 2^{n-1}

Die n . Figur entsteht aus der 1. Figur (1 Strecke) durch $n - 1$ Verdopplungen. Anzahl Strecken: 2^{n-1} .

c) **Ergebnis: Die 39. Figur**

- 250 Milliarden $= 2.5 \cdot 10^{11}$
- Probieren: $2^{37} \approx 1.374 \cdot 10^{11}$ ist noch zu klein, $2^{38} \approx 2.749 \cdot 10^{11}$ ist grösser als $2.5 \cdot 10^{11}$.
- Also $2^{n-1} = 2^{38}$, $n - 1 = 38$, $n = 39$: Die 39. Figur.