

Mathematik

90 Minuten · 11 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 oder SHARP EL-501 X
 - Kein zusätzliches Notizpapier
 - Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
-

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) Löse die Gleichung nach x auf.

$$5x - 7(2x - 3) = 3(4x - 1) - 17x$$

x: _____

b) Löse die Gleichung nach x auf.

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4x}{5} - \frac{2}{3} \right) = 1$$

x: _____

2 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\sqrt{21x^2 + (2x)^2} + \sqrt{32x} : \sqrt{2x}$$

Term: _____

b) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$\frac{9x + 14}{6x} - \frac{7y}{3x^2} : \frac{y}{x}$$

Term: _____

3 Theatertickets mit Gleichung

3 Punkte

Im Theater am Bach kostet ein Ticket für Erwachsene CHF 28 und ein Ticket für Jugendliche kostet CHF 15. Letzten Samstag wurden 252 Tickets verkauft und CHF 5236 eingenommen. Berechne mit Hilfe einer Gleichung, wie viele Jugendliche und wie viele Erwachsene die Vorstellung besucht haben.

Die volle Punktzahl kannst du nur erreichen, wenn deine Lösung auf einer Gleichung beruht.

Erwachsene: _____

Jugendliche: _____

4 Wohnmobil und Wechselkurse

2 Punkte

Familie Bettoni hat auf ein Inserat «Wohnmobil für USD 23 200 zu kaufen in San Francisco» reagiert und hat das Wohnmobil reserviert.

Noch in der Schweiz kaufen die Bettonis USD 23 200 (Wechselkurs: USD 1 = CHF 0.995). In San Francisco angekommen, übernehmen sie das Wohnmobil und bezahlen bar USD 23 200.

Nach vier Reisewochen verkaufen sie das Wohnmobil für einen Preis, der 6.2 % unter dem Kaufpreis liegt. Die erhaltenen US-Dollar wechseln sie in den USA zurück in CHF (Wechselkurs: CHF 1 = USD 1.059).

Berechne in CHF, wie viel sie für das Wohnmobil durch den Verlust (tieferen Verkaufspreis als Ankaufspreis) und das Wechseln von CHF in USD sowie das Wechseln von USD in CHF tatsächlich bezahlt haben.

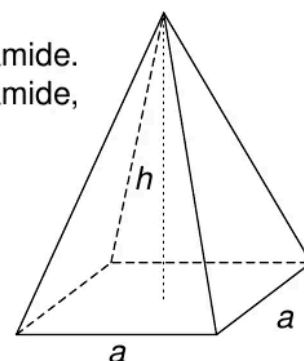
Kosten: _____ CHF

5 Volumen von Pyramide und Würfel

3 Punkte

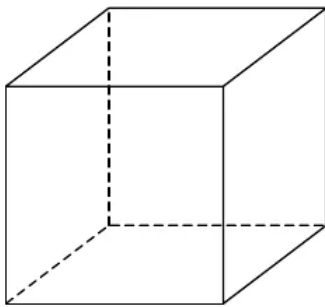
- a) Wir betrachten das Volumen einer quadratischen Pyramide. Die Höhe h ist fix. Wie ändert sich das Volumen der Pyramide, wenn die Länge der Grundkante a halbiert wird?

5. a) Wir betrachten das Volumen einer quadratischen Pyramide. Die Höhe h ist fix. Wie ändert sich das Volumen der Pyramide, wenn die Länge der Grundkante a halbiert wird?



Neues Volumen = ... des alten Volumens: _____

- b) Wir betrachten das Volumen eines Würfels. Um wie viel Prozent verkleinert sich sein Volumen, wenn alle Kantenlängen um 10 % verkürzt werden?



Verkleinerung: _____ %

6 Wahrscheinlichkeit Velo-Schultage

4 Punkte

- a) Simea und Viola gehen täglich von Montag bis Freitag in die Schule. Um fit zu bleiben, wählt Simea am Sonntagabend zufällig jeweils 3 Tage aus, an denen sie mit dem Fahrrad statt mit dem Bus zur Schule fährt.

Genauso hält es Viola: sie jedoch wählt zufällig 2 Tage aus, an denen sie mit dem Fahrrad statt mit dem Bus zur Schule fährt.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag beide mit dem Fahrrad zur Schule fahren.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) Simon und Noah gehen ebenfalls täglich von Montag bis Freitag in die Schule. Auch Simon und Noah fahren an zufällig ausgewählten Tagen mit dem Fahrrad zur Schule. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide am selben Tag mit dem Fahrrad zur Schule fahren, beträgt 16 %.

An wie vielen der 5 Schultage fährt Simon mit dem Fahrrad zur Schule und an wie vielen Noah? Gib alle Möglichkeiten an.

7 Punktspiegelung im Koordinatensystem

3 Punkte

Das Dreieck ABC wird am Spiegelzentrum $Z(2/0)$ gespiegelt.

a) Trage die Koordinaten des gespiegelten Dreiecks $A'B'C'$ unten ein.

- $A(-3/-1) \rightarrow A'(\text{---}/\text{---})$
- $B(2/1) \rightarrow B'(\text{---}/\text{---})$
- $C(3/5) \rightarrow C'(\text{---}/\text{---})$

A' x: _____

A' y: _____

B' x: _____

B' y: _____

C' x: _____

C' y: _____

- b) Überlege dir, wie sich die Koordinaten der gespiegelten Punkte berechnen lassen. Nun werden die Punkte $D(734/0)$ und $E(-410/-265)$ an Z gespiegelt. Berechne die Koordinaten der gespiegelten Punkte D' und E' .

- $D(734/0) \rightarrow D'(\text{---}/\text{---})$
- $E(-410/-265) \rightarrow E'(\text{---}/\text{---})$

D' x: _____

D' y: _____

E' x: _____

E' y: _____

8 Winkel in Halbkreisen

2 Punkte

M_1

und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Halbkreise (siehe nicht massstäbliche Abbildung). Berechne die Winkel α und β .

α : _____ °

β : _____ °

9 **Sonnensegel über einem Platz**

4 Punkte

Über einem rechteckigen Platz mit einer Länge von 8 m und einer Breite von 6 m wird ein dreieckiges Sonnensegel aufgespannt. Die Höhen der Eckpunkte über dem Platz sind in der Abbildung angegeben.

a) Berechne die Längen a , b und c des Sonnensegels.

$a =$

_____, $b =$ _____, $c =$ _____

a: _____ m

b: _____ m

c: _____ m

- b)** Das Sonnensegel wird wie abgebildet zu einem Viereck vergrössert. Berechne den Flächeninhalt des neuen Sonnensegels.

Flächeninhalt: _____ m²

10 Würfelmuster und Würfelnetz

4 Punkte

Ein Würfel hat auf jeder Fläche ein anderes Muster. Zwei Ansichten sind gegeben (siehe Abbildung). Der Würfel ist *nicht* durchsichtig. Für das bessere Verständnis sind die nicht sichtbaren Kanten gestrichelt eingezeichnet.

a) Ergänze die obere Fläche in der unten abgebildeten Ansicht mit dem korrekten Muster.

b) Ergänze das Würfelnetz mit den korrekten Mustern.

11 **Summe der Ecken**

3 Punkte

In einem quadratischen Feld mit fortlaufend nummerierten Kacheln werden jeweils die Zahlen aller grau markierten Ecken addiert.

Beispiel (siehe Abbildung unten links): $1 + 4 + 13 + 16 = 34$

- a) Berechne die Summe der Eckkacheln eines Feldes mit 100 Kacheln in der Länge und 100 Kacheln in der Breite.

Summe: _____

- b) Bilde einen Term für die Summe der Eckkacheln eines Feldes mit n Kacheln in der Länge und n Kacheln in der Breite. Du musst den Term *nicht* vereinfachen.

Term: _____

Lösungen

Gymiprüfung 2019 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 6$

- Klammern ausmultiplizieren: $5x - 14x + 21 = 12x - 3 - 17x$
- Zusammenfassen: $21 - 9x = -5x - 3$
- x -Terme nach rechts, Zahlen nach links: $24 = 4x$
- $x = 6$

b) **Ergebnis:** $x = \frac{5}{2} = 2.5$

Geschickt: Teile zuerst beide Seiten durch $\frac{3}{4}$, d.h. multipliziere mit $\frac{4}{3}$.

- $\frac{4x}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
- $+\frac{2}{3}: \frac{4x}{5} = \frac{6}{3} = 2$
- $\cdot 5: 4x = 10$
- $x = \frac{5}{2} = 2.5$

(Oder Klammer ausmultiplizieren: $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow 6x = 15$.)

2 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $5x + 4$

- $(2x)^2 = 4x^2$, also $\sqrt{21x^2 + 4x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x$
- Wurzeln darf man dividieren: $\sqrt{32x} : \sqrt{2x} = \sqrt{32x : 2x} = \sqrt{16} = 4$
- Ergebnis: $5x + 4$

b) **Ergebnis:** $\frac{3}{2}$

Punkt vor Strich: zuerst die Division.

- Durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren: $\frac{7y}{3x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{7}{3x}$
 - Auf den Nenner $6x$ erweitern: $\frac{7}{3x} = \frac{14}{6x}$
 - $\frac{9x+14}{6x} - \frac{14}{6x} = \frac{9x+14-14}{6x} = \frac{9x}{6x} = \frac{3}{2}$
-



3 Theatertickets mit Gleichung

3 Punkte

Ergebnis: 112 Erwachsene und 140 Jugendliche

- x = Anzahl Jugendliche, dann sind es $252 - x$ Erwachsene.
- Einnahmen: $15x + 28 \cdot (252 - x) = 5236$
- Ausmultiplizieren: $15x + 7056 - 28x = 5236$
- $-13x = -1820$, also $x = 140$
- Erwachsene: $252 - 140 = 112$

112 Erwachsene und 140 Jugendliche haben die Vorstellung besucht.

4 Wohnmobil und Wechselkurse

2 Punkte

Ergebnis: CHF 2'534.80

- Kaufpreis in CHF: $23\,200 \cdot 0.995 = 23\,084$ CHF
- Verkaufspreis in USD (6.2 % weniger, also 93.8 %): $23\,200 \cdot 0.938 = 21\,761.60$ USD
- Zurück in CHF (durch den Kurs teilen): $21\,761.60 : 1.059 \approx 20\,549.20$ CHF
- Kosten: $23\,084 - 20\,549.20 = 2\,534.80$ CHF

5 Volumen von Pyramide und Würfel

3 Punkte

a) **Ergebnis: Das Volumen wird geviertelt.**

- $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
- Mit halber Kante: $V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot h = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot h$
- Das ist ein Viertel von V : Das Volumen wird geviertelt.

(Mit Zahlen: $a = 10$ cm, $h = 5$ cm ergibt $V \approx 166.67$ cm³, mit $a = 5$ cm $V_{neu} \approx 41.67$ cm³.)

b) **Ergebnis: Das neue Volumen ist 27.1 % kleiner.**

- $V = a^3$
- Neue Kante: $0.9a$, also $V_{neu} = (0.9a)^3 = 0.729 \cdot a^3$
- Das sind 72.9 % des alten Volumens, also $100\% - 72.9\% = 27.1\%$ weniger.

(Mit Zahlen: $10^3 = 1000$ cm³, $9^3 = 729$ cm³.)



6 Wahrscheinlichkeit Velo-Schultage

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $P(\text{beide mit dem Velo}) = \frac{6}{25}$

- Simea fährt an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ Velo, Viola mit $\frac{2}{5}$.
- Beide wählen unabhängig: $P = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

(In der 5×5-Tabelle sind $3 \cdot 2 = 6$ von 25 Feldern «beide Velo».)

b) **Ergebnis: 3 Möglichkeiten: Simon 2-mal und Noah 2-mal, Simon 1-mal und Noah 4-mal, Simon 4-mal und Noah 1-mal.**

- $16\% = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$
- Fährt Simon an x Tagen und Noah an y Tagen Velo: $\frac{x}{5} \cdot \frac{y}{5} = \frac{4}{25}$, also $x \cdot y = 4$.
- Mit x, y zwischen 1 und 5: $1 \cdot 4, 4 \cdot 1$ oder $2 \cdot 2$.

Es gibt drei Möglichkeiten: 1. Simon und Noah fahren beide je 2-mal mit dem Fahrrad. 2. Simon 4-mal, Noah 1-mal. 3. Simon 1-mal, Noah 4-mal.

7 Punktspiegelung im Koordinatensystem

3 Punkte

a) Ergebnis: $A'(7/1), B'(2/-1), C'(1/-5)$

Bei der Punktspiegelung an Z ist Z die Mitte zwischen P und P' . Gehe vom Punkt zu Z und gleich weit noch einmal weiter.

- $A(-3/-1)$: bis Z sind es $+5$ nach rechts und $+1$ nach oben, also $A'(2 + 5/0 + 1) = A'(7/1)$
- $B(2/1)$: $B'(2/-1)$
- $C(3/5)$: $C'(1/-5)$

b) Ergebnis: $D'(-730/0), E'(414/265)$

Da Z die Mitte von P und P' ist, gilt: $x' = 2 \cdot 2 - x = 4 - x$ und $y' = 2 \cdot 0 - y = -y$.

- D' : $x' = 4 - 734 = -730, y' = 0 \rightarrow D'(-730/0)$

- $E': x' = 4 - (-410) = 414, y' = 265 \rightarrow E'(414/265)$

8 Winkel in Halbkreisen

2 Punkte

Ergebnis: $\alpha = 35^\circ$ und $\beta = 125^\circ$

- Der kleine Halbkreis hat den Durchmesser vom linken Endpunkt bis M_1 . Nach Thales ist der Winkel beim Schnittpunkt auf dem kleinen Halbkreis 90° .
- Im rechtwinkligen Dreieck mit dem 20° -Winkel: $\gamma = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ (Winkel bei M_1).
- Nebenwinkel bei M_1 : $\delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
- Das Dreieck aus M_1 , dem oberen linken Punkt und dem rechten Endpunkt ist gleichschenkelig (zwei Radien des grossen Halbkreises). Basiswinkel: $\alpha = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$.
- Im Dreieck mit dem linken Endpunkt (20°) und dem rechten Endpunkt (35°): $\beta = 180^\circ - 20^\circ - 35^\circ = 125^\circ$.

9 Sonnensegel über einem Platz

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $a = b = \sqrt{26} \approx 5.099 \text{ m}, c = \sqrt{68} \approx 8.246 \text{ m}$

Jede Seite ist die Raumdiagonale eines Quaders: zwei Strecken am Boden und der Höhenunterschied. Pythagoras im Raum: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- a : am Boden 4 m und 3 m, Höhenunterschied $4 - 3 = 1 \text{ m}$: $a = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5.099 \text{ m}$
- b : am Boden 4 m und 3 m, Höhenunterschied $3 - 2 = 1 \text{ m}$: $b = \sqrt{26} \approx 5.099 \text{ m}$
- c : am Boden 8 m, Höhenunterschied $4 - 2 = 2 \text{ m}$: $c = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \approx 8.246 \text{ m}$

b) **Ergebnis:** 24.74 m^2

- Alle vier Seiten sind gleich lang ($\sqrt{26} \text{ m}$): Das Viereck ist ein Rhombus.
- Diagonale $c = \sqrt{68} \approx 8.246 \text{ m}$ (aus Teilaufgabe a).
- Die andere Diagonale d verbindet die beiden 3-m-Ecken: Sie liegen gleich hoch und 6 m auseinander, also $d = 6 \text{ m}$.
- $A = \frac{c \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{68}}{2} = 3 \cdot \sqrt{68} \approx 24.74 \text{ m}^2$

10 Würfelmuster und Würfelnetz

4 Punkte

a) **Ergebnis:** siehe Abbildung

Aus den Ansichten kennst du die sechs Muster: Punkt, Kreuz (beide Diagonalen), eine einzelne Diagonale, «V», Streifen (Linie durch die Mitte) und Kreis.

- Das Kreuz grenzt an Punkt, Diagonale, Streifen und V. Also liegt der Kreis gegenüber dem Kreuz.
- In der gesuchten Ansicht ist vorne der Kreis, rechts der Punkt. Die Fläche oben muss also an Kreis und Punkt grenzen.

- Aus den beiden Ansichten folgt: Oben liegt der Streifen. Die Linie verläuft durch die Mitte der oberen Fläche, parallel zur vorderen oberen Kante (siehe Abbildung).

b) Ergebnis: siehe Abbildung

Gegenüberliegende Flächen: Kreuz und Kreis, Punkt und V, Streifen und einzelne Diagonale. Gegenüberliegende Flächen dürfen im Netz nie aneinandergrenzen.

Starte bei der schon eingezeichneten V-Fläche mit den Ecken A und B und klappe das Netz in Gedanken zusammen. Setze dann Kreis, Punkt, Streifen, Kreuz und Diagonale so ein, dass Nachbarflächen und Ausrichtung der Linien zur Würfelansicht passen. Die korrekte Lösung zeigt die Abbildung.

11 Summe der Eckkacheln

3 Punkte

a) Ergebnis: 20'002

- Die Ecken sind 1, 100 (Ende der ersten Zeile), 10 000 (letzte Kachel) und 10 000 — $100 + 1 = 9901$ (Anfang der letzten Zeile).
- $1 + 100 + 9901 + 10\,000 = 20\,002$

Schneller: Zwei gegenüberliegende Ecken haben dieselbe Summe, also $2 \cdot (1 + 10\,000) = 20\,002$.

b) Ergebnis: $2n^2 + 2$

- Ecken: oben links 1, oben rechts n , unten rechts n^2 , unten links $n \cdot (n - 1) + 1 = n^2 - n + 1$.
- Summe: $1 + n + n^2 + n^2 - n + 1 = 2n^2 + 2$

Oder: Zwei gegenüberliegende Ecken haben dieselbe Summe, also $2 \cdot (1 + n^2) = 2 + 2n^2$.