

Mathematik

90 Minuten · 11 Aufgaben · 38 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 oder SHARP EL-501 X
 - Lösungsweg muss ersichtlich sein
 - Kein zusätzliches Notizpapier
-

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Löse die Gleichungen nach x auf.

a) $29 + (8 - 17x) = 7 - 4(5 - 2x)$

x: _____

b) $x - \frac{x+7}{15} = \frac{3}{2} - \frac{3(4-3x)}{10}$

x: _____

2 Terme vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a) $-\frac{2c}{b} : \frac{c^2}{b} + \frac{6a+5c}{3ac}$

Term: _____

b) $\frac{(4x)^2}{\sqrt{64x^2+36x^2}} + \frac{3x}{2}$

Term: _____

3 Rechenwürfel mit Termen

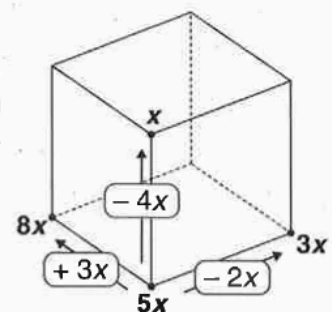
4 Punkte

In dieser Aufgabe sind spezielle „Rechenwürfel“ dargestellt. Man berechnet die Terme in benachbarten Ecken, indem man jeweils die in Pfeilrichtung angegebene Operation ausführt. Ein Beispiel siehst du nebenan abgebildet.

Mathematik

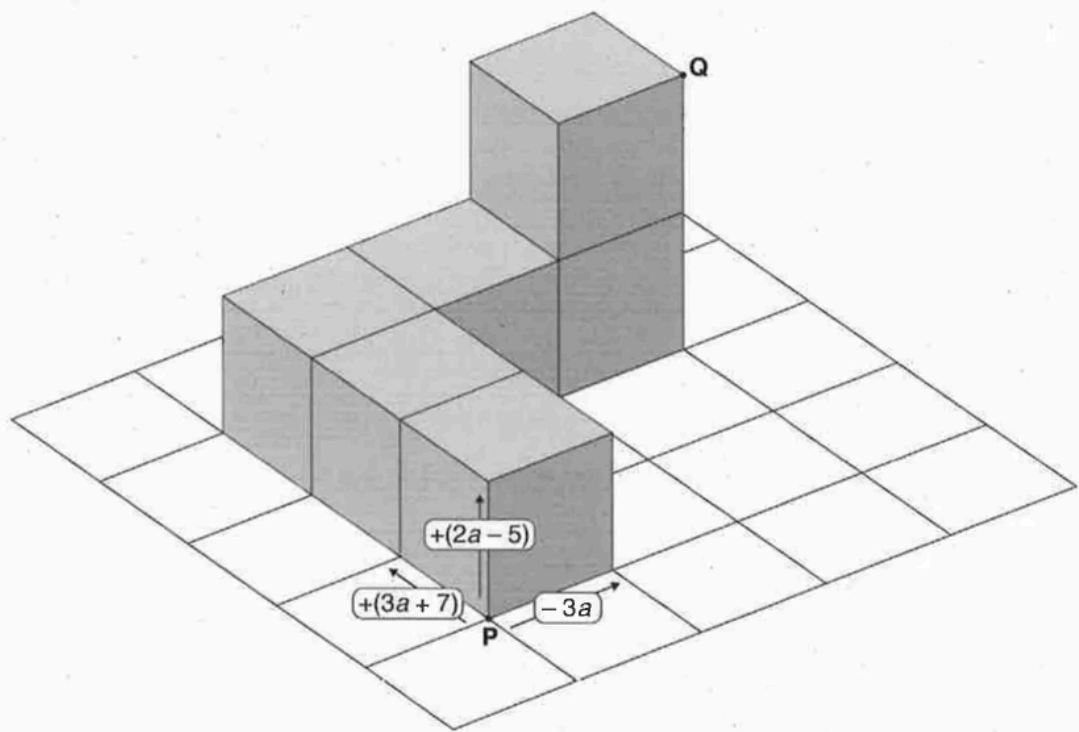
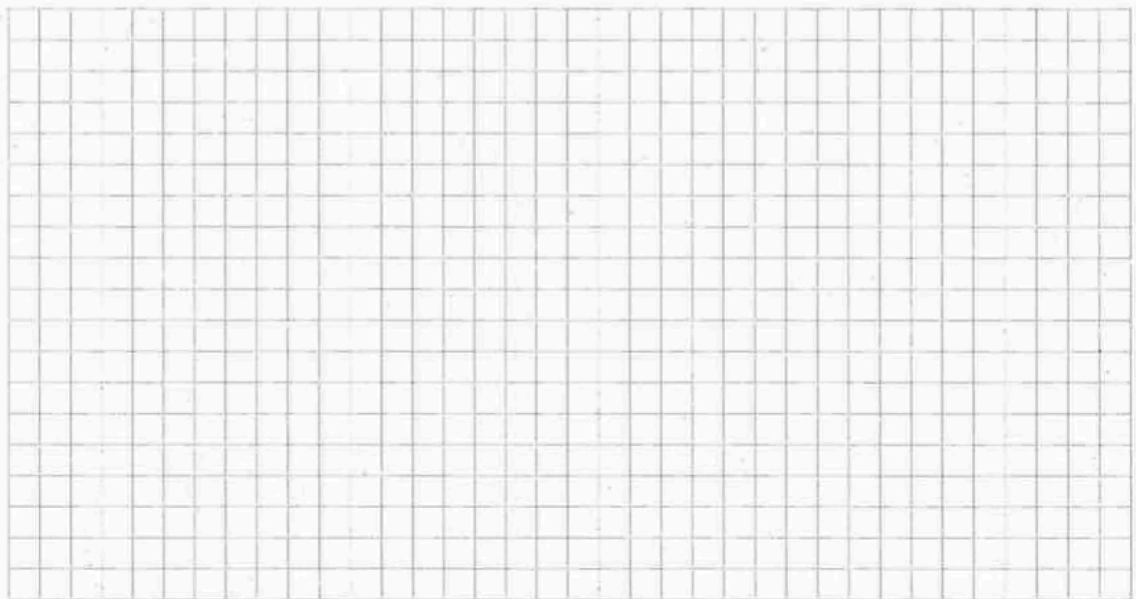
ZAP 2020 (KG)

- 3 In dieser Aufgabe sind spezielle „Rechenwürfel“ dargestellt. Man berechnet die Terme in benachbarten Ecken, indem man jeweils die in Pfeilrichtung angegebene Operation ausführt. Ein Beispiel siehst du nebenan abgebildet.



- a) Im unten abgebildeten Würfelkörper ist der Term in der Ecke P gegeben. Er lautet $12 - 8a$.

Berechne den Term in der Ecke Q .



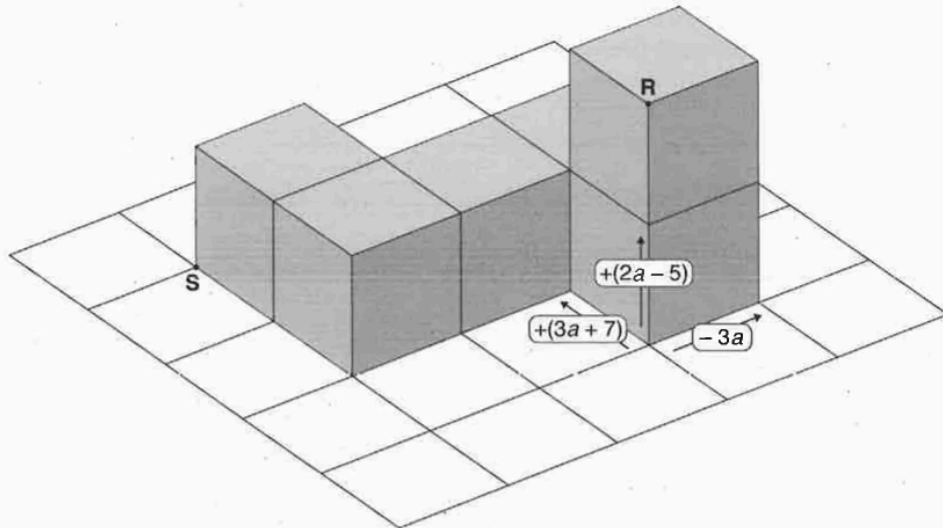
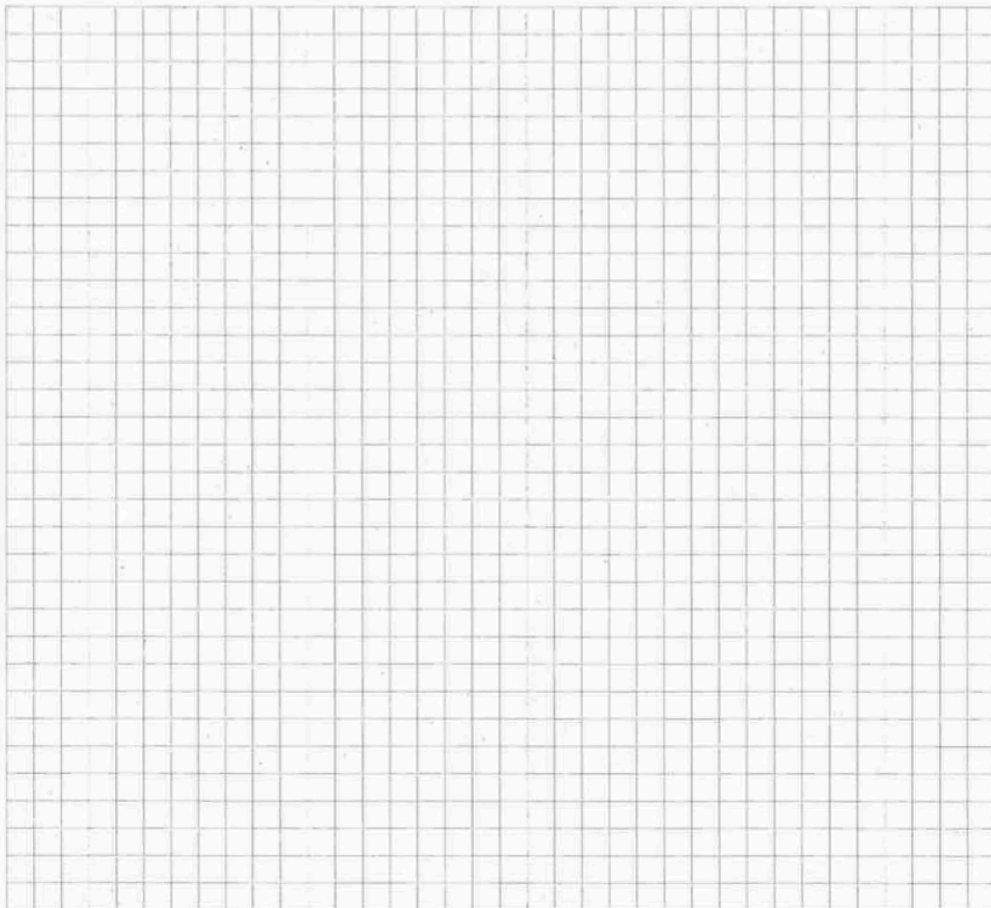
4 von 18

Q: _____

- b) Im unten abgebildeten Würfelkörper ist der Term in der Ecke R gegeben. Er lautet $2 - 4a$.
- Berechne den Term in der Ecke S .

- b)** Im unten abgebildeten Würfelkörper ist der Term in der Ecke R gegeben. Er lautet $2 - 4a$.

Berechne den Term in der Ecke S.



S: _____

4 Smartphones in Applingen

2 Punkte

In Applingen sind 48 % der Bevölkerung männlich. Davon besitzen $\frac{5}{8}$ ein Smartphone. 52 % der Bevölkerung sind weiblich. Davon besitzen $\frac{3}{4}$ ein Smartphone. 837 Einwohnerinnen und Einwohner besitzen *kein* Smartphone.

Berechne, wie viele Personen in Applingen wohnen.

Anzahl Personen: _____

5 Gleichungen aufstellen

3 Punkte

Im Folgenden werden drei verschiedene Situationen beschrieben. Stelle jeweils eine Gleichung mit der Unbekannten x auf, welche die Situation des Textes beschreibt. Ausser x darf keine weitere Unbekannte in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst und auch *nicht* vereinfacht werden!

- a) Eine Fahrt mit dem Riesenrad kostet für Erwachsene CHF 12 und für Kinder CHF 7. Heute wurden 268 Tickets verkauft. Es wurden CHF 2606 eingenommen. Gesucht ist die Anzahl x der heute verkauften Kindertickets.

x

: Anzahl der heute verkauften *Kindertickets*

Die Gleichung lautet: _____

- b) Liam besitzt CHF 86 mehr als Emma. Würde Emma Liam CHF 27 schenken, hätte Liam doppelt so viel Geld wie Emma. Gesucht ist, wie viel Geld Emma besitzt.

x

: Emmas Geld in CHF

Die Gleichung lautet: _____

- c) Eine Mutter ist heute 3-mal so alt wie ihre Tochter. Vor 10 Jahren war sie 7-mal so alt, wie ihre Tochter damals war. Gesucht ist das Alter der Tochter heute.

x

: Alter der *Tochter heute*

Die Gleichung lautet: _____

6 Glücksräder am Messestand

5 Punkte

An einem Messestand kann man ein Geschenk gewinnen. Dazu müssen die beiden unten abgebildeten Glücksräder gedreht werden. Wenn die Pfeile bei beiden Rädern auf das weisse Feld mit dem Paket zeigen, so gewinnt man und erhält das Geschenk.

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, ein Geschenk zu erhalten.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) 3124 Personen haben nichts erhalten. Haben eher 3317, 3491, 3752 oder 3929 Personen die Glücksräder gedreht? Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Anzahl Personen (3317 / 3491 / 3752 / 3929): _____

- c) Das zweite Glücksrad wird ausgetauscht. Das erste Glücksrad bleibt. Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein Geschenk zu erhalten, 10 %.

Berechne, wie gross der Anteil des weissen Feldes an der Gesamtfläche des neuen Glücksrades ist.

Anteil: _____

7 Füllgraphen den Gefässen zuordnen

2 Punkte

In einer Bar sind vier Getränkebehälter montiert. Sie sind alle vollständig gefüllt.

Die Gefässe werden so geleert, dass pro Zeiteinheit immer gleich viel Flüssigkeit ausfliesst.

Die unten abgebildeten Graphen zeigen, wie dabei die Füllhöhe abnimmt.

Ordne die Graphen den Gefässen zu, indem du die Buchstaben in die Quadrate neben den Graphen notierst.

Graph oben links (A / B / C / D): _____

Graph oben rechts (A / B / C / D): _____

Graph unten links (A / B / C / D): _____

Graph unten rechts (A / B / C / D): _____

8

Rhombus konstruieren und berechnen

5 Punkte

- a) Die Strecke AB ist die Seite eines Rhombus. Der Schnittpunkt M seiner beiden Diagonalen liegt auf g .
- a1) Konstruiere *alle* möglichen Lösungen für M und beschrifte sie.
 - a2) Konstruiere *einen* möglichen Rhombus.

b) Ein Rhombus hat die angegebenen Masse. Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.

- b1) Berechne die Länge der Diagonalen AC .
- b2) Berechne die Länge der Diagonalen BD .

AC: _____ cm

BD: _____ cm

9 Rechteck in drei Flächen

3 Punkte

Das Rechteck $ABCD$ ist in drei Flächen A_1 , A_2 und A_3 unterteilt (siehe nicht massstabsgetreue Abbildung). A_2 und A_3 haben den gleichen Flächeninhalt. Der Flächeninhalt von A_1 ist halb so gross wie derjenige von A_2 .

Man weiss ausserdem: $\overline{AD} = \overline{BC} = 5 \text{ cm}$, $\overline{DE} = 13 \text{ cm}$ und $\overline{GC} = 12.5 \text{ cm}$

Berechne die Länge der Strecke EF .

EF: _____ cm

10 Luftlinie Uetliberg–Adlisberg

4 Punkte

In der unten abgebildeten Skizze sind drei Orte eingezeichnet: der Uetliberg, der Hauptbahnhof (HB) Zürich und der Adlisberg.

Lesebeispiel: Der HB Zürich ist in x -Richtung 3657 m und in y -Richtung 3179 m vom Uetliberg entfernt und liegt 408 m über Meer.

- a) Berechne die Länge der direkten Strecke (Luftlinie) vom Uetliberg zum HB Zürich.

Luftlinie: _____ m

- b) Der Adlisberg liegt tiefer als der Uetliberg und höher als der HB Zürich. Die Länge der direkten Strecke (Luftlinie) vom HB Zürich zum Adlisberg beträgt 4139 m.

Berechne, wie viele Meter über Meer der Adlisberg liegt.

Höhe Adlisberg: _____ m ü. M.

11 Graue Quadrätchen am Rand

2 Punkte

Aus kleinen Quadrätchen werden wie unten abgebildet Rechtecke gebildet.

a) Berechne, wie viele graue Quadrätchen die Figur für $a = 20$ hat.

Anzahl: _____

- b) Gib eine Formel an, mit welcher sich die Anzahl grauer Quadrätchen für ein beliebiges a berechnen lässt. Der Term muss *nicht* vereinfacht werden.

Lösungen

Gymiprüfung 2020 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = 2$

- Klammern auflösen: $29 + 8 - 17x = 7 - 20 + 8x$
- Zusammenfassen: $37 - 17x = 8x - 13$
- x auf eine Seite, Zahlen auf die andere: $50 = 25x$
- $x = 2$

b) **Ergebnis:** $x = 23$

- Geschickt: Der Hauptnenner von 15, 2 und 10 ist 30. Multipliziere die ganze Gleichung mit 30.
- $30x - 2(x + 7) = 45 - 9(4 - 3x)$
- Klammern auflösen: $30x - 2x - 14 = 45 - 36 + 27x$
- Zusammenfassen: $28x - 14 = 9 + 27x$
- $x = 23$

2 Terme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{5}{3a}$

- Dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren: $-\frac{2c}{b} \cdot \frac{b}{c^2} = -\frac{2}{c}$
- Auf den Nenner $3ac$ erweitern: $-\frac{2}{c} = -\frac{6a}{3ac}$
- Addieren: $-\frac{6a}{3ac} + \frac{6a+5c}{3ac} = \frac{5c}{3ac}$
- Kürzen mit c : $\frac{5}{3a}$

b) **Ergebnis:** $\frac{31x}{10} = 3.1x$

- Zähler: $(4x)^2 = 16x^2$
- Unter der Wurzel zuerst addieren: $\sqrt{64x^2 + 36x^2} = \sqrt{100x^2} = 10x$
- $\frac{16x^2}{10x} = \frac{8x}{5} = \frac{16x}{10}$
- $\frac{16x}{10} + \frac{15x}{10} = \frac{31x}{10} = 3.1x$

3 Rechenwürfel mit Termen

4 Punkte

a) Ergebnis: $Q: 16 - 7a$

- Zähle, wie oft du von P nach Q jede Pfeilrichtung gehen musst: 2-mal nach oben $+(2a - 5)$, 2-mal nach hinten links $+(3a + 7)$, 3-mal nach rechts $-3a$.
- $12 - 8a + 2 \cdot (2a - 5) + 2 \cdot (3a + 7) + 3 \cdot (-3a)$
- $= 12 - 8a + 4a - 10 + 6a + 14 - 9a$
- $= 16 - 7a$

b) Ergebnis: $S: 33 + 7a$

- Zähle die Schritte von R nach S : 2-mal nach unten (gegen den Pfeil, also $-(2a - 5)$), 3-mal nach hinten links (mit dem Pfeil, also $+(3a + 7)$) und 2-mal nach links (gegen den Pfeil, also $-(-3a)$).
- $2 - 4a - 2 \cdot (2a - 5) + 3 \cdot (3a + 7) - 2 \cdot (-3a)$
- $= 2 - 4a - 4a + 10 + 9a + 21 + 6a$
- $= 33 + 7a$
- Kontrolle: Setze x als Term in S an und geh von S nach R : $x + 2(2a - 5) - 3(3a + 7) + 2(-3a) = 2 - 4a$ ergibt ebenfalls $x = 33 + 7a$.

4 Smartphones in Applingen

2 Punkte

Ergebnis: In Applingen wohnen 2700 Personen.

- Männer mit Smartphone: $\frac{5}{8} \cdot 48 \% = 30 \%$ der Bevölkerung
- Frauen mit Smartphone: $\frac{3}{4} \cdot 52 \% = 39 \%$ der Bevölkerung
- Mit Smartphone: $30 \% + 39 \% = 69 \%$, also ohne Smartphone: $100 \% - 69 \% = 31 \%$
- $31 \% \hat{=} 837$, also $1 \% \hat{=} 27$ und $100 \% \hat{=} 2700$

5 Gleichungen aufstellen

3 Punkte

a) Ergebnis: $7x + 12 \cdot (268 - x) = 2606$

- Kindertickets: x , Erwachsenentickets: $268 - x$
- Einnahmen Kinder: $7x$, Einnahmen Erwachsene: $12 \cdot (268 - x)$
- Zusammen 2606 Franken: $7x + 12 \cdot (268 - x) = 2606$

b) **Ergebnis:** $2 \cdot (x - 27) = x + 86 + 27$

- Emma hat x , Liam hat $x + 86$.
- Nach dem Geschenk: Emma hat $x - 27$, Liam hat $x + 86 + 27$.
- Liam hat dann doppelt so viel wie Emma: $2 \cdot (x - 27) = x + 86 + 27$

c) **Ergebnis:** $3x - 10 = 7 \cdot (x - 10)$

- Heute: Tochter x , Mutter $3x$
- Vor 10 Jahren: Tochter $x - 10$, Mutter $3x - 10$
- Damals war die Mutter 7-mal so alt: $3x - 10 = 7 \cdot (x - 10)$

6 Glücksräder am Messestand

5 Punkte

a) **Ergebnis:** $P(\text{Geschenk}) = \frac{1}{6}$

- 1. Glücksrad: Das weisse Feld hat einen rechten Winkel, also $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$.
- 2. Glücksrad: Das graue Feld hat 120° , das weisse also 240° , d. h. $\frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$.
- Beide müssen weiss zeigen, also multiplizieren: $P(\text{Geschenk}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) **Ergebnis:** Ungefähr 3752 Personen haben die Glücksräder gedreht.

- Nichts erhalten hat man mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
- $\frac{5}{6} \hat{=} 3124$, also $\frac{6}{5} \hat{=} \frac{3124 \cdot 6}{5} = 3748.8$
- Am nächsten liegt 3752 (Probe: $\frac{5}{6} \cdot 3752 \approx 3126$).

c) **Ergebnis:** $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$ (**Zentriwinkel 144°**)

- x : Wahrscheinlichkeit, dass das 2. Glücksrad auf Weiss zeigt.
- Das 1. Rad zeigt mit $\frac{1}{4}$ auf Weiss: $\frac{1}{4} \cdot x = \frac{1}{10}$
- $x = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$
- Das weisse Feld hat also einen Zentriwinkel von $0.4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.

7 Füllgraphen den Gefässen zuordnen

2 Punkte

Ergebnis: Oben links: D, oben rechts: C, unten links: A, unten rechts: B

- Idee: Wo das Gefäss breit ist, sinkt die Füllhöhe langsam (Graph flach). Wo es schmal ist, sinkt sie schnell (Graph steil).

- **A:** oben schmaler werdend, unten gleich breit (Quader). Erst sinkt die Höhe schnell, dann gleichmässig → Graph mit gerader Linie am Ende (unten links).
- **B:** oben breit (Trichter), unten schmaler Quader. Erst langsam, dann immer schneller, am Ende gerade und steil (unten rechts).
- **C:** in der Mitte am breitesten. Oben und unten schnell, in der Mitte langsam (oben rechts).
- **D:** in der Mitte am schmalsten. Oben und unten langsam, in der Mitte schnell (oben links).

8 Rhombus konstruieren und berechnen

5 Punkte

a) **Ergebnis: Zwei Lösungen M_1 und M_2 (Schnittpunkte des Thaleskreises über AB mit g), z. B. Rhombus ABC_1D_1 .**

- Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Der Winkel bei M im Dreieck ABM ist also 90° .
- Darum liegt M auf dem Thaleskreis über AB : Konstruiere den Mittelpunkt von AB und zeichne den Kreis durch A und B .
- Der Thaleskreis schneidet g in zwei Punkten: M_1 und M_2 (beide beschriften).
- Rhombus: Spiegle A an M_1 (Verlängerung von AM_1 um die gleiche Länge) → C_1 . Spiegle B an M_1 → D_1 . Verbinde A, B, C_1, D_1 .
- Genauso mit M_2 ergibt sich der zweite Rhombus ABC_2D_2 .

b) **Ergebnis:** $\overline{AC} = 40 \text{ cm}$, $\overline{BD} = 30 \text{ cm}$

b1)

- F_2 ist der Fusspunkt der 24-cm-Höhe von C auf die Verlängerung von AB .
- Im rechtwinkligen Dreieck BF_2C : $\overline{BF_2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 \text{ cm}$
- $\overline{AF_2} = 25 + 7 = 32 \text{ cm}$
- $\overline{AC} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \text{ cm}$

b2)

- Fläche des Rhombus: $A = 25 \cdot 24 = 600 \text{ cm}^2$
- Die Fläche ist auch $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$, also $\overline{BD} = \frac{2 \cdot 600}{40} = 30 \text{ cm}$
- Alternative: $\overline{AM} = 20$, also $\overline{BM} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ und $\overline{BD} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ cm}$

9 Rechteck in drei Flächen

3 Punkte

Ergebnis: $\overline{EF} = 6.5 \text{ cm}$

- Dreieck AED ist rechtwinklig: $\overline{AE} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$
- $A_1 = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$, also $A_2 = A_3 = 2 \cdot 30 = 60 \text{ cm}^2$
- Ganzes Rechteck: $30 + 60 + 60 = 150 \text{ cm}^2$, also $\overline{AB} = 150 : 5 = 30 \text{ cm}$
- A_3 ist ein Trapez: $\frac{\overline{FB} + 12.5}{2} \cdot 5 = 60$, also $\overline{FB} + 12.5 = 24$ und $\overline{FB} = 11.5 \text{ cm}$
- $\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{FB} - \overline{AE} = 30 - 11.5 - 12 = 6.5 \text{ cm}$

10 Luftlinie Uetliberg–Adlisberg

4 Punkte

a) Ergebnis: $\approx 4868 \text{ m}$

- Unterschiede: x -Richtung 3657 m, y -Richtung 3179 m, Höhe $870 - 408 = 462 \text{ m}$
- Raumdiagonale (Pythagoras in 3D): $d = \sqrt{3657^2 + 3179^2 + 462^2} \approx 4867.559 \text{ m} \approx 4868 \text{ m}$

b) Ergebnis: $\approx 702 \text{ m ü. M.}$

- Unterschiede HB $\rightarrow$ Adlisberg: x -Richtung $7715 - 3657 = 4058 \text{ m}$, y -Richtung $3179 - 2419 = 760 \text{ m}$
- Waagrechte Strecke: $\sqrt{4058^2 + 760^2} \approx 4128.555 \text{ m}$
- Höhenunterschied h : $\sqrt{4139^2 - 4128.555^2} \approx 293.866 \text{ m}$ (oder direkt: $h^2 = 4139^2 - 4058^2 - 760^2 = 86357$)
- Der Adlisberg liegt höher als der HB: $408 + 293.866 \approx 702 \text{ m ü. M.}$

11 Graue Quadrätchen am Rand

2 Punkte

a) Ergebnis: 116 graue Quadrätchen

- Die Figur ist a breit und $2a$ hoch. Grau ist nur der Rand.
- Rand: 2 Seiten mit a , 2 Seiten mit $2a$, die 4 Ecken sind doppelt gezählt: $2 \cdot a + 2 \cdot 2a - 4$
- Für $a = 20$: $2 \cdot 20 + 2 \cdot 40 - 4 = 116$
- Alternative: Pro Schritt kommen 6 graue Quadrätchen dazu (14, 20, 26, ...): $14 + 17 \cdot 6 = 116$

b) **Ergebnis:** $6a - 4$ (oder gleichwertig, z. B. $6 \cdot (a - 1) + 2$)

- Rand zählen: zwei lange Seiten mit $2a$, zwei kurze mit a , die 4 Ecken nicht doppelt zählen.
- $2a + 2 \cdot 2a - 4 = 6a - 4$
- Andere richtige Formen: $6 \cdot (a - 1) + 2$, $4a + 2 \cdot (a - 2)$, $a \cdot 2a - (a - 2) \cdot (2a - 2)$, $2a + 2 \cdot (2a - 2)$