

Mathematik

90 Minuten · 12 Aufgaben · 34 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
 - Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 Solar II oder SHARP EL-501 T
 - Kein zusätzliches Notizpapier
 - Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
 - Geometrische Konstruktionen müssen nachvollziehbar sein
-

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Löse die Gleichungen nach x auf.

a)

$$14 + (-11 - 4x) = 3 - 6(x + 2)$$

x: _____

b)

$$3 \cdot \left(\frac{5x}{2} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3x}{4} + 5$$

x: _____

2 Bruch- und Wurzelterme vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a)

$$\frac{3x}{4} + \frac{6x^2y}{25z} : \frac{3xy}{5z}$$

Term: _____

b)

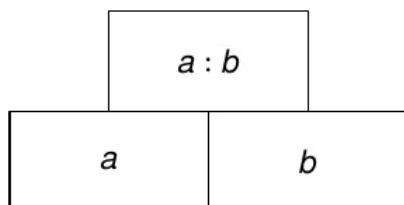
$$\frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}}{\sqrt{26x^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}}$$

Term: _____

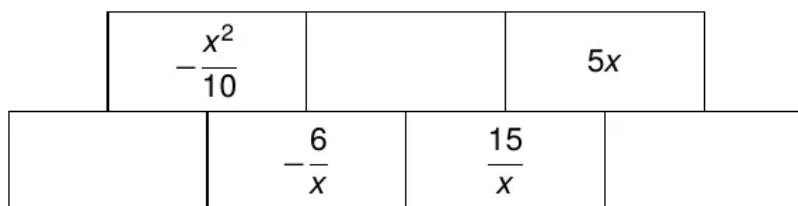
3 Rechenmauer mit Quotienten

3 Punkte

In den folgenden Rechenmauern steht in einem Kästchen immer der *Quotient* der beiden darunterliegenden Kästchen, wobei jeweils das *linke durch das rechte Kästchen* dividiert wird (siehe Beispiel).



Vervollständige die Rechenmauer. Die Resultate müssen *vollständig gekürzt* sein.



unten links: _____

oben Mitte: _____

unten rechts: _____

4 Gleichungen zu Textaufgaben aufstellen

3 Punkte

Im Folgenden werden drei verschiedene Situationen beschrieben. Stelle jeweils eine Gleichung mit der Unbekannten x auf, welche die Situation des Textes beschreibt. Ausser x darf keine weitere Unbekannte in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst und auch *nicht* vereinfacht werden!

- a) Anna, Beat und Carla haben zusammen 99 Baumnüsse gesammelt. Anna hat 16 Baumnüsse mehr gesammelt als Beat, und Carla hat halb so viele Baumnüsse gesammelt wie die anderen beiden zusammen. Gesucht ist die Anzahl x der Baumnüsse, die Beat gesammelt hat.

x

: Anzahl der Baumnüsse, die Beat gesammelt hat

Die Gleichung lautet: _____

- b) Eine Seilbahn bietet Tickets für die Bergfahrt und Tickets für die Talfahrt an. Ein Ticket für die Bergfahrt kostet CHF 18, ein Ticket für die Talfahrt CHF 13. An einem schönen Sommertag werden insgesamt 1680 Tickets für CHF 25 440 verkauft. Gesucht ist die Anzahl x der verkauften Bergfahrt-Tickets.

x

: Anzahl der verkauften Bergfahrt-Tickets

Die Gleichung lautet: _____

- c) Robin besitzt 140 Rollen Toilettenpapier mehr als Evan. Evan kauft Robin 50 Rollen ab. Nun hat Evan $\frac{2}{3}$ so viele Rollen Toilettenpapier wie Robin. Gesucht ist die Anzahl x der Rollen Toilettenpapier, die Evan zu Beginn besessen hat.

x

: Anzahl Rollen Toilettenpapier von Evan zu Beginn

Die Gleichung lautet: _____

5 Volumeneinheiten paarweise zuordnen

2 Punkte

Jeweils zwei der folgenden Grössen sind gleich gross und bilden ein Paar. Eine Grösse bleibt übrig. Bilde die drei Paare.

0.05 m³, 0.005 l, 50 l, 5 dm³, 500 mm³, 5 cm³, 0.5 ml

Paar 1: _____ = _____

Paar 2: _____ = _____

Paar 3: _____ = _____

0.05 m³ = (0.005 l / 50 l / 5 dm³ / 500 mm³ / 5 cm³ / 0.5 ml): _____

0.005 l = (0.05 m³ / 50 l / 5 dm³ / 500 mm³ / 5 cm³ / 0.5 ml): _____

500 mm³ = (0.05 m³ / 0.005 l / 50 l / 5 dm³ / 5 cm³ / 0.5 ml): _____

6 Benzinverbrauch im Diagramm

2 Punkte

Sven hat Daten zum Benzinverbrauch der sechs Fahrzeuge A , B , C , D , E und F gesammelt und dazu eine Grafik angefertigt. Sie ist unten bei jeder Teilaufgabe abgebildet. Verwende zur Lösung jeweils die zur Teilaufgabe gehörige Abbildung.

- a) Färbe das Gebiet in der Grafik, in welchem Fahrzeuge eingezeichnet werden, die gleich viel oder mehr Benzin pro Kilometer verbrauchen als Fahrzeug *E*.

- b) Bestimme, welches Fahrzeug am wenigsten und welches am meisten Benzin pro Kilometer verbraucht.

Verbraucht am wenigsten Benzin pro Kilometer: _____

Verbraucht am meisten Benzin pro Kilometer: _____

am wenigsten (A / B / C / D / E / F): _____

am meisten (A / B / C / D / E / F): _____

7 Benzinverbrauch auf Teilstrecke

2 Punkte

Ein Auto fährt von A über B nach C . Der durchschnittliche Benzinverbrauch auf der Fahrt von A nach C beträgt 6 Liter pro 100 km. Auf den 40 km von A nach B verbraucht das Auto 2 Liter Benzin.

Berechne, wie viel Benzin das Auto auf den 80 km von B nach C verbraucht.

Benzin von B nach C: _____ l

8 Pralinen und Prozente

2 Punkte

Eine Schokoladenfabrik produziert Pralinen. 2.5 % der Pralinen werden aus heller Schokolade, der Rest aus dunkler Schokolade hergestellt. 25 % der hellen Pralinen und 30 % der dunklen Pralinen enthalten Nüsse.

- a) Heute werden insgesamt 7680 Pralinen hergestellt. Berechne, wie viele helle Pralinen ohne Nüsse hergestellt werden.

helle Pralinen ohne Nüsse: _____

- b) Gestern wurden 5460 dunkle Pralinen ohne Nüsse hergestellt. Berechne, wie viele Pralinen gestern insgesamt hergestellt wurden.

Pralinen insgesamt: _____

9 Höhe im rechtwinkligen Dreieck

3 Punkte

Das graue Dreieck ABD hat einen Flächeninhalt von 30 cm^2 . Die restliche Masse kannst du der Beschriftung der nicht massstabsgetreuen Abbildung entnehmen.

Berechne die Länge x .

x : _____ cm

10 Winkel in Dreiecken berechnen

2 Punkte

Berechne die Grössen der Winkel α und β .

M

ist der Mittelpunkt der Strecke CD . Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.

α : _____ °

β : _____ °

11 Würfel mit aufgesetzter Pyramide

3 Punkte

Einem Würfel ist eine Pyramide aufgesetzt. Die Würfelkanten sind 9 cm lang. Die Seitenkanten der Pyramide sind 7 cm lang. Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.

Berechne die Länge der fett eingezeichneten Strecke AS .

AS: _____ cm

12 Kamerastandorte konstruieren

4 Punkte

Die Abbildungen zeigen einen Innenhof in der Ansicht von oben.

a) Im Innenhof ist eine Kamera montiert. Folgendes ist bekannt:

- Die Kamera filmt den Abschnitt AB der Wand unter einem *stumpfen Winkel*.
- Die Kamera hat einen Abstand von mindestens 2 m von der Wand.

Konstruiere und *schraffiere* in der Abbildung das Gebiet, in welchem die Kamera stehen könnte.

In der Abbildung gilt: 1 cm entspricht 1 m.

- b) Im Innenhof werden zwei Kameras montiert, die den Abschnitt AB der Wand je unter einem *Winkel* von 90° filmen. Das Gebiet, das von *beiden Kameras* erfasst wird, ist *grau* markiert.

Konstruiere und markiere die beiden Kamerastandorte.

Lösungen

Gymiprüfung 2021 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -6$

1. Klammern auflösen: $14 - 11 - 4x = 3 - 6x - 12$

2. Zusammenfassen: $3 - 4x = -9 - 6x$

3. $+6x$ und -3 auf beiden Seiten: $2x = -12$

4. Durch 2 teilen: $x = -6$

b) **Ergebnis:** $x = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$

1. Klammer ausmultiplizieren: $\frac{15x}{2} - 4 = \frac{3x}{4} + 5$

2. Mit 4 multiplizieren, damit die Brüche verschwinden: $30x - 16 = 3x + 20$

3. $-3x$ und $+16$: $27x = 36$

4. $x = \frac{36}{27} = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$

2 Bruch- und Wurzelterme vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{23x}{20} = 1.15x$

1. Punkt vor Strich: zuerst die Division. Durch einen Bruch teilt man, indem man mit dem Kehrwert multipliziert: $\frac{6x^2y}{25z} : \frac{3xy}{5z} = \frac{6x^2y}{25z} \cdot \frac{5z}{3xy}$

2. Kürzen ($6 : 3 = 2$, $5 : 25 = \frac{1}{5}$, $x^2 : x = x$, y und z fallen weg): $= \frac{2x}{5}$

3. Addieren mit Hauptnenner 20: $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} = \frac{15x}{20} + \frac{8x}{20} = \frac{23x}{20}$

b) **Ergebnis:** $\frac{2}{5} = 0.4$

1. Unter der Wurzel im Nenner zuerst zusammenfassen: $26x^2 - x^2 = 25x^2$

2. Wurzeln zusammenfassen: $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{16x^2}$ und $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{28x}} = \sqrt{\frac{7x}{28x}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$

3. Wurzeln ziehen: $\frac{\sqrt{16x^2}}{\sqrt{25x^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4x}{5x} \cdot \frac{1}{2}$

4. $= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} = 0.4$

3 Rechenmauer mit Quotienten

3 Punkte

Ergebnis: unten links: $\frac{3x}{5}$, oben Mitte: $-\frac{2}{5}$, unten rechts: $\frac{3}{x^2}$

Regel: oberes Kästchen = linkes : rechtes Kästchen darunter.

1. **Oben Mitte:** $\left(-\frac{6}{x}\right) : \frac{15}{x} = -\frac{6}{x} \cdot \frac{x}{15} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

2. **Unten links** (nennen wir es a): $a : \left(-\frac{6}{x}\right) = -\frac{x^2}{10}$. Umkehren: $a = -\frac{x^2}{10} \cdot \left(-\frac{6}{x}\right) = \frac{6x}{10} = \frac{3x}{5}$

3. **Unten rechts** (nennen wir es b): $\frac{15}{x} : b = 5x$. Also $b = \frac{15}{x} : 5x = \frac{15}{5x^2} = \frac{3}{x^2}$

4 Gleichungen zu Textaufgaben aufstellen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $x + 16 + x + \frac{1}{2}(x + x + 16) = 99$

- Beat: x
- Anna: $x + 16$
- Carla: halb so viel wie Anna und Beat zusammen: $\frac{1}{2}(x + x + 16)$
- Alle zusammen sind 99: $x + 16 + x + \frac{1}{2}(x + x + 16) = 99$

(Die Reihenfolge der Summanden darf anders sein.)

b) **Ergebnis:** $18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25\,440$

- Bergfahrt-Tickets: x , Einnahmen $18x$
- Talfahrt-Tickets: der Rest, also $1680 - x$, Einnahmen $13 \cdot (1680 - x)$
- Zusammen ergibt das den Umsatz: $18x + 13 \cdot (1680 - x) = 25\,440$

c) **Ergebnis:** $\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50$

- Zu Beginn: Evan x , Robin $x + 140$
- Nach dem Kauf: Evan $x + 50$, Robin $x + 140 - 50$
- Evan hat jetzt $\frac{2}{3}$ von Robins Menge: $\frac{2}{3} \cdot (x + 140 - 50) = x + 50$



5 Volumeneinheiten paarweise zuordnen

2 Punkte

Ergebnis: $0.05 \text{ m}^3 = 50 \text{ l}$, $0.005 \text{ l} = 5 \text{ cm}^3$, $500 \text{ mm}^3 = 0.5 \text{ ml}$ (übrig: 5 dm^3)

Merke: $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ und $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$. Bei Volumen ist der Umrechnungsfaktor zwischen benachbarten Einheiten 1000.

- $0.05 \text{ m}^3 = 50 \text{ dm}^3 = 50 \text{ l}$
- $0.005 \text{ l} = 5 \text{ ml} = 5 \text{ cm}^3$
- $500 \text{ mm}^3 = 0.5 \text{ cm}^3 = 0.5 \text{ ml}$
- Übrig bleibt 5 dm^3 (das wären 5 l).

6 Benzinverbrauch im Diagramm

2 Punkte

a) **Ergebnis:** Gebiet oberhalb der Geraden durch 0 und E , inklusive dieser Geraden.

Der Verbrauch pro Kilometer ist $\frac{\text{Benzin}}{\text{Distanz}}$, also die Steigung der Geraden vom Nullpunkt zum Punkt.

1. Zeichne die Gerade vom Nullpunkt durch E . Alle Punkte auf dieser Geraden haben genau den gleichen Verbrauch pro km wie E .
2. Punkte oberhalb dieser Geraden (steiler) verbrauchen mehr pro km.
3. Färbe also das Gebiet zwischen der y -Achse und dieser Geraden. Die Gerade selbst gehört dazu.

b) **Ergebnis:** am wenigsten: F , am meisten: A

Verbinde jeden Punkt mit dem Nullpunkt. Je steiler die Gerade, desto mehr Benzin pro Kilometer.

- Die flachste Gerade geht durch F : viel Distanz, wenig Benzin. F verbraucht am wenigsten pro km.
- Die steilste Gerade geht durch A : kurze Distanz, aber schon recht viel Benzin. A verbraucht am meisten pro km.

7 Benzinverbrauch auf Teilstrecke

2 Punkte

Ergebnis: 5.2 l

1. Die ganze Strecke A bis C ist $40 + 80 = 120$ km.
2. Verbrauch auf 120 km: 100 km $\hat{=}$ 6 l, also 120 km $\hat{=}$ $\frac{120 \cdot 6}{100} = 7.2$ l
3. Davon braucht das Auto 2 l auf AB . Für BC bleibt: $7.2 - 2 = 5.2$ l

8 Pralinen und Prozente

2 Punkte

a) Ergebnis: 144

1. Helle Pralinen: 2.5 % von 7680: $\frac{7680 \cdot 2.5}{100} = 192$
2. Ohne Nüsse sind 100 % - 25 % = 75 % davon: $\frac{192 \cdot 75}{100} = 144$

b) Ergebnis: 8000

1. Dunkle Pralinen ohne Nüsse sind 70 % aller dunklen: $70\% \hat{=} 5460$, also $100\% \hat{=} \frac{5460 \cdot 100}{70} = 7800$ dunkle Pralinen.
2. Die dunklen sind $100\% - 2.5\% = 97.5\%$ aller Pralinen: $100\% \hat{=} \frac{7800 \cdot 100}{97.5} = 8000$

Oder in einem Schritt: $0.7 \cdot 0.975 \cdot x = 5460 \Rightarrow x = 8000$

9 Höhe im rechtwinkligen Dreieck

3 Punkte

Ergebnis: $x = 6.6 \text{ cm}$

Idee: Die Fläche des Dreiecks BCD lässt sich auf zwei Arten berechnen. Einmal mit Grundseite CD , einmal mit Grundseite BC und Höhe x .

1. Aus der Fläche von ABD : $30 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5$, also $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$.
2. $\overline{AC} = 5 + 11 = 16 \text{ cm}$. Pythagoras im Dreieck ABC : $\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$
3. Fläche von BCD mit Grundseite $CD = 11 \text{ cm}$ und Höhe $AB = 12 \text{ cm}$: $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 66 \text{ cm}^2$ (oder: $A_{ABC} - A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 - 30 = 96 - 30 = 66 \text{ cm}^2$)
4. Dieselbe Fläche mit Grundseite BC und Höhe x : $66 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot x$
5. $x = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6.6 \text{ cm}$

10 Winkel in Dreiecken berechnen

2 Punkte

Ergebnis: $\alpha = 58.5^\circ, \beta = 31.5^\circ$

Lies die Bögen in der Figur: Der gestrichelte Bogen um C zeigt $\overline{CA} = \overline{CD}$. Der strichpunktierte Bogen um D zeigt $\overline{DC} = \overline{DB}$. Der gepunktete Bogen ist der Thaleskreis über CD (Mittelpunkt M), S liegt darauf.

1. Nebenwinkel bei A : $\angle DAC = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$
2. Dreieck ACD ist gleichschenkelig ($CA = CD$), also $\angle ADC = 63^\circ$. Dann ist $\angle CDB = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.
3. Dreieck DBC ist gleichschenkelig ($DC = DB$): $\beta = \frac{180^\circ - 117^\circ}{2} = 31.5^\circ$
4. S liegt auf dem Thaleskreis über CD , also $\angle CSD = 90^\circ$: DS ist die Höhe im gleichschenkligen Dreieck DBC und halbiert den Winkel bei D : $\alpha = \frac{117^\circ}{2} = 58.5^\circ$ (oder: im rechtwinkligen Dreieck DBS ist $\angle SDB = 180^\circ - 90^\circ - 31.5^\circ = 58.5^\circ$, also $\alpha = 117^\circ - 58.5^\circ = 58.5^\circ$)

11 Würfel mit aufgesetzter Pyramide

3 Punkte

Ergebnis: $\overline{AS} \approx 13.51 \text{ cm}$

Idee: S liegt senkrecht über der Mitte der Würfel-Deckfläche. AS ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks: waagrecht die halbe Diagonale des Quadrats, senkrecht Würfelkante plus Pyramidenhöhe.

1. Diagonale der Deckfläche: $d = \sqrt{9^2 + 9^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12.728 \text{ cm}$, halbe Diagonale $\frac{d}{2} \approx 6.364 \text{ cm}$

2. Pyramidenhöhe (Seitenkante 7 cm, halbe Diagonale): $h = \sqrt{7^2 - 6.364^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.915 \text{ cm}$

3. A liegt senkrecht unter einer Ecke der Deckfläche. Waagrechter Abstand von A zum Fusspunkt von S : wieder $\frac{d}{2} \approx 6.364 \text{ cm}$. Senkrechter Abstand: $9 + 2.915 = 11.915 \text{ cm}$

4. $\overline{AS} = \sqrt{6.364^2 + 11.915^2} \approx 13.51 \text{ cm}$

(Gleichwertig: $\overline{AS} = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2 + (9 + 2.915)^2}$.)

12 Kamerastandorte konstruieren

4 Punkte

a) **Ergebnis:** Teil des Thaleskreises über AB (Inneres), der oberhalb der Parallelen zur Wand im Abstand 2 cm liegt.

1. **Stumpfer Winkel:** Punkte auf dem Thaleskreis über AB sehen AB unter genau 90° . Punkte *innerhalb* dieses Halbkreises sehen AB unter einem stumpfen Winkel.

Konstruiere also den Halbkreis k über AB (Mittelpunkt = Mitte von AB , Radius $\frac{\overline{AB}}{2}$).

2. **Mindestens 2 m Abstand:** Zeichne die Parallele p zur Wand im Abstand 2 cm (= 2 m).
Die Kamera muss auf oder oberhalb von p stehen.
3. Schraffiere das Gebiet innerhalb des Halbkreises k und oberhalb von p .

b) **Ergebnis:** K_1 und K_2 auf dem Thaleskreis über AB , auf den Verlängerungen der Seiten des grauen Dreiecks.

1. Beide Kameras sehen AB unter 90° , also liegen sie auf dem Thaleskreis k über AB .
Konstruiere k .
2. Eine Kamera in K erfasst das Dreieck AKB . Das graue Gebiet ist das Dreieck ABS , wo sich die beiden erfassten Dreiecke überschneiden. Seine Seiten liegen also auf den Sichtlinien der Kameras.
3. Verlängere die Seite von B durch die Spitze S des grauen Dreiecks bis zum Thaleskreis: Schnittpunkt K_1 .
4. Verlängere die Seite von A durch S bis zum Thaleskreis: Schnittpunkt K_2 .
5. K_1 und K_2 sind die Kamerastandorte.

