

Mathematik

90 Minuten · 11 Aufgaben · 36 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 Solar II oder SHARP EL-501 T
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Geometrische Konstruktionen müssen nachvollziehbar sein

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Löse die Gleichungen nach x auf.

a) $19 - (2x - 4) = 8 - 3(2x + 7)$

x: _____

b) $\frac{8x}{5} - \frac{12x - 3}{4} = 3x - 2$

x: _____

2 Bruchterme und Wurzeln vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{36x}{25y} : \frac{16x^2}{5y} \cdot \frac{8x^3}{27}$

b)
$$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8x^2 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{(13x)^2 - (5x)^2}}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{18x}}$$

3 Gesuchten Term bestimmen

3 Punkte

- a) Welchen *Term* muss man von $5a + 3b$ *subtrahieren*, damit man $-5a + 9b$ erhält?

Vereinfache den gesuchten Term so weit wie möglich.

- b) Welchen *Term* muss man durch $\frac{5c}{6a}$ *dividieren*, damit man $\frac{3}{10c}$ erhält?

Vereinfache den gesuchten Term so weit wie möglich.

4 Gleichungen zu Textaufgaben aufstellen

3 Punkte

Im Folgenden werden drei verschiedene Situationen beschrieben. Stelle jeweils eine Gleichung mit der Unbekannten x auf, welche die Situation des Textes beschreibt. Ausser x darf keine weitere Unbekannte in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst und auch *nicht* vereinfacht werden!

- a) In einem Restaurant stehen Tische für zwei Personen und Tische für vier Personen. Die insgesamt 25 Tische bieten Platz für 68 Gäste. Gesucht ist die Anzahl x der Tische für zwei Personen.

x

: Anzahl Tische für zwei Personen

Die Gleichung lautet: _____

- b) Kishana und Simon sammeln Punkte bei ihren Einkäufen in einem Supermarkt. Zu Beginn beträgt Kishanas Anzahl gesammelter Punkte $\frac{2}{3}$ von Simons Anzahl. Simon gibt Kishana 8000 seiner Punkte. Kishana hat nun doppelt so viele Punkte wie Simon. Gesucht ist die Anzahl Punkte x , die Simon zu Beginn hatte.

x

: Simons Anzahl Punkte zu Beginn

Die Gleichung lautet: _____

- c) Ada ist heute fünfmal so alt wie Elia. In vier Jahren wird Ada achtmal so alt sein, wie Elia vor vier Jahren (in Bezug auf heute) gewesen ist. Gesucht ist Elias heutiges Alter x .

x

: heutiges Alter von Elia

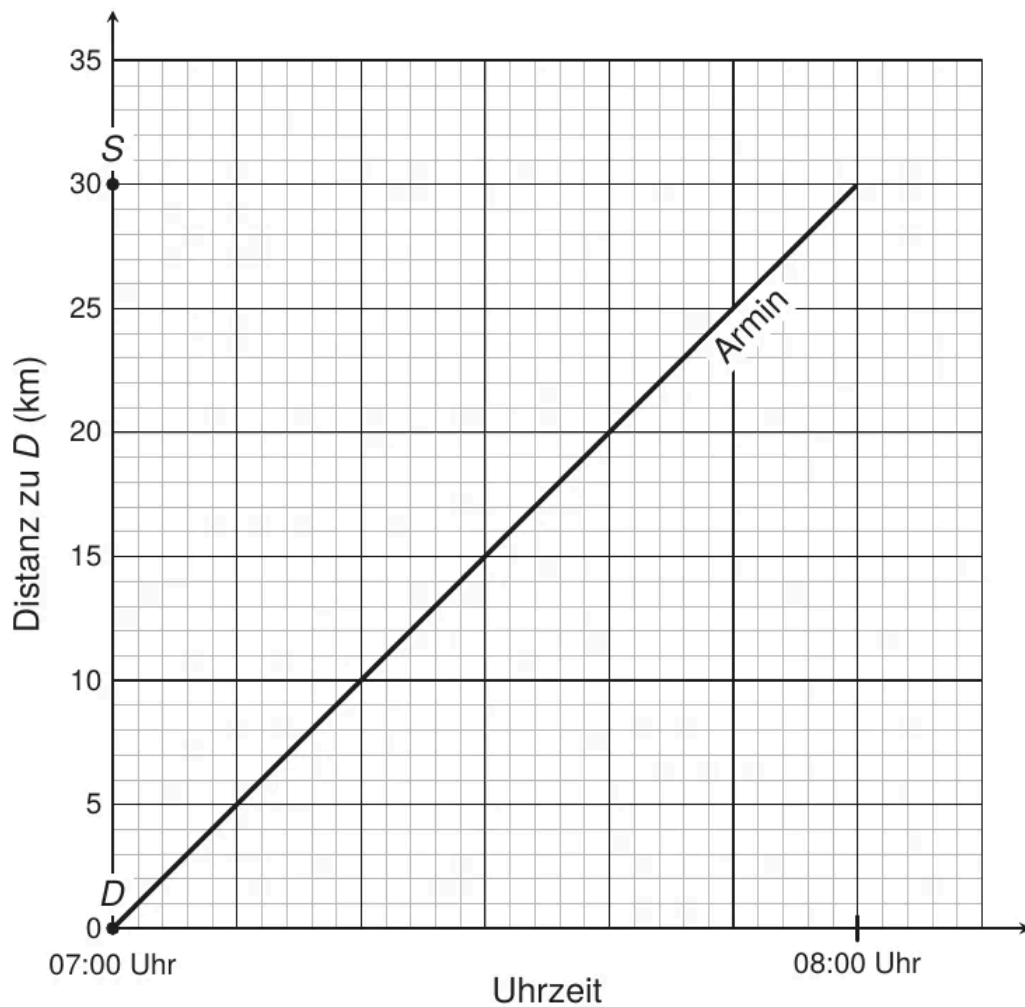
Die Gleichung lautet: _____

5

Weg-Zeit-Diagramm Traktorfahrt

2 Punkte

Armin fährt mit seinem Traktor vom Dorf D in die Stadt S . In der folgenden Grafik ist seine Traktorfahrt dargestellt.



- a1) Mona fährt mit dem Auto ebenfalls vom Dorf D in die Stadt S . Sie startet um 7:20 Uhr, fährt mit konstanter Geschwindigkeit und legt pro Stunde 60 km zurück.

a1) Zeichne Monas Autofahrt in der Grafik ein.

- a2) Mona überholt Armin auf ihrer Fahrt. Wie viele Kilometer hat Mona bis zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt? Lies das Ergebnis aus der Grafik ab.

Strecke: _____ km

- b) Claudio startet mit dem Velo in der Stadt S in Richtung D :

- Er fährt mit konstanter Geschwindigkeit und legt pro Stunde 30 km zurück.
- Nach einer kurzen Fahrt macht er eine Pause in einem Café.
- Nachdem Claudio dort schon 30 min gesessen hat, fährt Armin auf seinem Traktor am Café vorbei. Zu diesem Zeitpunkt hat Armin auf seinem Traktor schon 25 km zurückgelegt.

Zeichne Folgendes in der Grafik ein: Claudios Fahrt und seine Pause im Café bis zu dem Zeitpunkt, an dem Armin am Café vorbeifährt.

6

Angestellte im Homeoffice

2 Punkte

In einer Firma sind 40 % der Angestellten Männer und 60 % Frauen.

$\frac{2}{3}$

der Männer und 75 % der Frauen arbeiten auch von zu Hause aus.

32 Männer arbeiten nur in der Firma.

Berechne, wie viele Frauen nur in der Firma arbeiten.

Anzahl Frauen: _____

7 Oktaeder und Tetraeder würfeln

4 Punkte

Ein Oktaeder hat 8 gleiche Flächen. Ein Tetraeder hat 4 gleiche Flächen. Mit einem Oktaeder (beschriftet mit den Zahlen 1 bis 8) und einem Tetraeder (beschriftet mit den Zahlen 1 bis 4) wird gleichzeitig gewürfelt.

Die Abbildung stellt ein mögliches Ergebnis dar. Der Oktaeder (links) zeigt eine 2 und der Tetraeder (rechts) zeigt eine 1.

- a) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit zwei gleiche Zahlen geworfen werden.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) Anna macht ein Experiment. Sie würfelt mit einem Oktaeder und einem Tetraeder gleichzeitig und addiert die beiden gewürfelten Zahlen. Dies wiederholt sie viele Male. Dabei zählt sie 135-mal die Summe 11 oder 12.

Hat Anna eher 720, 1050, 1450 oder 2150 Mal gewürfelt? Entscheide mit Hilfe einer Rechnung.

Anzahl Würfe (720 / 1050 / 1450 / 2150): _____

8 Graue Dreiecke im Quadrat

3 Punkte

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $3x$ (siehe Abbildung).

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle_1$.

b) Berechne, welcher Bruchteil des Quadrates *grau* eingefärbt ist.

Bruchteil: _____

9 Dachstock: Fläche und Volumen

4 Punkte

Ein Dachstock hat die in der Abbildung angegebenen Masse. $ABCD$ ist ein Rechteck.

- a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$.

Flächeninhalt: _____ m^2

- b) Berechne das Volumen des Dachstockes.

Volumen: _____ m^3

10 Rhombus konstruieren

2 Punkte

Die Gerade g sowie die Punkte P , Q und R sind unten vorgegeben.

Konstruiere einen Rhombus, der Folgendes erfüllt:

- P liegt auf der Seite AB .
- Q liegt auf der Diagonalen BD .
- R liegt auf der Seite AD .
- Die Diagonale AC liegt auf g .

Zur Hilfe kannst du die Skizze ergänzen.

Deine Konstruktionsschritte müssen ersichtlich sein.

Skizze

(erste Abbildung)

Konstruktion

(zweite Abbildung)

11 Bäume und Zaunpfosten am Veloweg

3 Punkte

Entlang eines langen, geraden Veloweges stehen auf der einen Seite Bäume und auf der anderen Seite ein Holzzaun. Der Abstand zwischen je zwei Bäumen misst 42 m, der Abstand zwischen je zwei Zaunpfosten misst 15 m. Der Start ist an einer Stelle, an der ein Baum und ein Zaunpfosten auf derselben Höhe sind.

- a) Lili fährt mit dem Velo vom Start aus etwas mehr als einen Kilometer, bis sie auf eine Stelle trifft, an der ein Baum und ein Zaunpfosten auf gleicher Höhe stehen. Berechne, wie viele Meter sie vom Start aus mit dem Velo gefahren ist.

Strecke: _____ m

- b) Tim zeichnet beim Start mit Kreide einen grauen Punkt auf den Veloweg. Er geht nun entlang des Weges und zeichnet jeweils in gleichen Abständen von x Metern einen grauen Punkt auf den Veloweg. Nach 630 m macht er zum ersten Mal einen grauen Punkt, auf dessen Höhe sich ebenfalls ein Baum und ein Zaunpfosten befinden. Berechne den kürzest möglichen Abstand x .

x : _____ m

Lösungen

Gymiprüfung 2022 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -9$

- Klammern auflösen (Minus vor der Klammer dreht die Vorzeichen): $19 - 2x + 4 = 8 - 6x - 21$
- Zusammenfassen: $23 - 2x = -13 - 6x$
- $+6x$ und -23 auf beiden Seiten: $4x = -36$
- Durch 4 teilen: $x = -9$

b) **Ergebnis:** $x = \frac{5}{8} = 0.625$

- Beide Seiten mit 20 (kgV von 5 und 4) multiplizieren. Achtung: Der zweite Bruch steht hinter einem Minus, also gilt $-5(12x - 3) = -60x + 15$.
- $32x - 60x + 15 = 60x - 40$
- Zusammenfassen: $15 - 28x = 60x - 40$
- $+28x$ und $+40$: $55 = 88x$
- $x = \frac{55}{88} = \frac{5}{8} = 0.625$

2 Bruchterme und Wurzeln vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{2x^2}{15} = 0.\overline{13}x^2$

- Durch einen Bruch teilen heisst mit dem Kehrwert multiplizieren:

$$\frac{36x}{25y} \cdot \frac{5y}{16x^2} \cdot \frac{8x^3}{27}$$

- Kürzen: y fällt weg, 36 und 27 durch 9, 5 und 25 durch 5, 8 und 16 durch 8, $x \cdot x^3 : x^2 = x^2$:

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^2}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4x^2}{30} = \frac{2x^2}{15}$$

b) **Ergebnis:** $\frac{8}{3x}$

- Wurzeln zusammenfassen:
 - $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
 - $\sqrt{8x^2 + x^2} = \sqrt{9x^2} = 3x$
 - $\sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = \sqrt{169x^2 - 25x^2} = \sqrt{144x^2} = 12x$
 - $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{18x} = \sqrt{36x^2} = 6x$
- Einsetzen: $\frac{4}{3x} \cdot \frac{12x}{6x} = \frac{4}{3x} \cdot 2 = \frac{8}{3x}$

3 Gesuchten Term bestimmen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $10a - 6b = 2(5a - 3b)$

- Ansatz mit dem gesuchten Term T : $(5a + 3b) - T = -5a + 9b$
- Nach T auflösen: $T = (5a + 3b) - (-5a + 9b)$
- Klammer mit Minus davor auflösen: $T = 5a + 3b + 5a - 9b = 10a - 6b$
- Ausklammern ist auch richtig: $T = 2(5a - 3b)$

b) **Ergebnis:** $\frac{1}{4a}$

- Ansatz: $T : \frac{5c}{6a} = \frac{3}{10c}$
- Die Umkehrung der Division ist die Multiplikation: $T = \frac{3}{10c} \cdot \frac{5c}{6a}$
- Kürzen (c fällt weg, 3 mit 6, 5 mit 10): $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{4a}$

4 Gleichungen zu Textaufgaben aufstellen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $2x + 4(25 - x) = 68$

- x Tische für zwei Personen bieten $2x$ Plätze.
- Die übrigen $25 - x$ Tische sind Vierertische mit $4(25 - x)$ Plätzen.
- Zusammen sind es 68 Plätze: $2x + 4(25 - x) = 68$

b) **Ergebnis:** $2(x - 8000) = \frac{2x}{3} + 8000$

- Zu Beginn: Simon hat x , Kishana hat $\frac{2x}{3}$ Punkte.

- Nach dem Geschenk: Simon hat $x - 8000$, Kishana hat $\frac{2x}{3} + 8000$ Punkte.
- Kishana hat jetzt doppelt so viele wie Simon: $2(x - 8000) = \frac{2x}{3} + 8000$

c) **Ergebnis:** $5x + 4 = 8(x - 4)$

- Heute: Elia ist x , Ada ist $5x$ Jahre alt.
- Ada in vier Jahren: $5x + 4$. Elia vor vier Jahren: $x - 4$.
- Gleichung: $5x + 4 = 8(x - 4)$

5

Weg-Zeit-Diagramm Traktorfahrt

2 Punkte

a1) **Ergebnis:** Gerade von (7:20 Uhr | 0 km) bis (7:50 Uhr | 30 km), siehe Grafik

- Mona startet um 7:20 Uhr bei 0 km.
- 60 km pro Stunde heisst 10 km in 10 Minuten. Nach 30 Minuten (um 7:50 Uhr) ist sie bei 30 km, also in S .
- Zeichne eine Gerade von (7:20 Uhr | 0 km) bis (7:50 Uhr | 30 km).

a2) Ergebnis: 20 km

- Mona überholt Armin dort, wo sich die beiden Geraden schneiden.
- Der Schnittpunkt liegt bei 7:40 Uhr und 20 km.
- Kontrolle: Armin fährt 30 km pro Stunde, also 20 km in 40 Minuten. Mona fährt 60 km pro Stunde, also 20 km in 20 Minuten (7:20 bis 7:40 Uhr).

b) Ergebnis: Fahrt von (7:10 Uhr | 30 km) bis (7:20 Uhr | 25 km), Pause bei 25 km bis 7:50 Uhr, siehe Grafik

- Armin hat 25 km zurückgelegt: Laut Grafik ist das um 7:50 Uhr. Das Café liegt also 25 km von D entfernt, 5 km von S .
- Claudio sitzt um 7:50 Uhr schon 30 min im Café, also ist er um 7:20 Uhr angekommen.
- Für 5 km braucht er bei 30 km pro Stunde 10 Minuten. Er ist also um 7:10 Uhr in S gestartet.
- Zeichne: Strecke von (7:10 Uhr | 30 km) nach (7:20 Uhr | 25 km), dann waagrecht (Pause) bis (7:50 Uhr | 25 km).

6 Angestellte im Homeoffice

2 Punkte

Ergebnis: 36 Frauen arbeiten nur in der Firma.

- $\frac{2}{3}$ der Männer arbeiten auch zu Hause, also arbeitet $\frac{1}{3}$ der Männer nur in der Firma:
 $\frac{1}{3} \hat{=} 32$
- Alle Männer: $\frac{3}{3} \hat{=} 96$
- Die Männer sind 40 % aller Angestellten: $40 \% \hat{=} 96$, also $100 \% \hat{=} 240$ Angestellte.
- Frauen: 60% von $240 = 144$
- 75 % der Frauen arbeiten auch zu Hause, also arbeiten 25 % nur in der Firma: 25% von $144 = 36$

7 Oktaeder und Tetraeder würfeln

4 Punkte

a) Ergebnis: $\frac{1}{8} = 12.5 \%$

- Es gibt $8 \cdot 4 = 32$ gleich wahrscheinliche Ergebnisse.
- Gleiche Zahlen sind nur möglich mit 1-1, 2-2, 3-3 und 4-4 (der Tetraeder hat nur 1 bis 4). Das sind 4 günstige Ergebnisse.
- $P(2 \text{ gleiche Zahlen}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 12.5 \%$

b) Ergebnis: Am ehesten 1450-mal

- Summe 11 oder 12 gibt es nur mit (Oktaeder, Tetraeder) = (8, 3), (7, 4) und (8, 4). Das sind 3 von 32 Ergebnissen.
- $P(\text{Summe 11 oder 12}) = \frac{3}{32} = 9.375 \%$
- Erwartet: $\frac{3}{32}$ aller Würfe ergeben 11 oder 12. Also $\frac{3}{32} \hat{=} 135$ Würfe, dann $\frac{1}{32} \hat{=} 45$ und $\frac{32}{32} \hat{=} 1440$ Würfe.

- Kontrolle mit den Auswahlmöglichkeiten: $\frac{3}{32} \cdot 1450 \approx 135.9$ passt am besten ($720 \rightarrow 67.5, 1050 \rightarrow 98.4, 2150 \rightarrow 201.6$).
- Anna hat am ehesten 1450-mal gewürfelt.

8

Graue Dreiecke im Quadrat

3 Punkte

a) Ergebnis: $\frac{3x^2}{2}$

- Nimm als Grundseite von $\triangle_1$ das Stück der Quadratseite unten links. Es ist x lang.
- Die Ecke rechts liegt auf der gegenüberliegenden Quadratseite. Die Höhe ist deshalb die ganze Quadratseite $3x$.
- $A_{\triangle_1} = \frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$
- Andere Möglichkeit: halbes Quadrat minus das weisse rechtwinklige Dreieck darunter: $\frac{1}{2}(3x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2x = \frac{9x^2}{2} - \frac{6x^2}{2} = \frac{3x^2}{2}$

b) Ergebnis: $\frac{1}{2} = 50\%$

- Bei jedem grauen Dreieck liegt eine Grundseite auf einer Quadratseite. Die Höhe ist der Abstand der Spitze zu dieser Quadratseite. Rechne jeweils Grundseite mal Höhe durch 2 (Nummerierung siehe Lösungsgrafik):

- $A_{\triangle_1} = \frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$

- $A_{\triangle_2} = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$

- $A_{\triangle_3} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$

- $A_{\triangle_4} = \frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$

- Grau insgesamt: $\frac{3x^2}{2} + x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{2} = \frac{9x^2}{2} = 4.5x^2$

- Quadrat: $(3x)^2 = 9x^2$

- Bruchteil: $\frac{4.5x^2}{9x^2} = \frac{1}{2} = 50\%$

9 Dachstock: Fläche und Volumen

4 Punkte

a) Ergebnis: 140 m^2

- Das Trapez ist symmetrisch. Links und rechts ragt die lange Seite je $\frac{40-16}{2} = 12 \text{ m}$ über die kurze hinaus.
- Höhe des Trapezes mit Pythagoras (Schenkel 13 m): $h = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$
- $A = \frac{40 + 16}{2} \cdot 5 = 28 \cdot 5 = 140 \text{ m}^2$

b) **Ergebnis:** 384 m^3

- Höhe des Dachs: Die Trapezhöhe (5 m) ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der halben Breite $\frac{8}{2} = 4 \text{ m}$. $h_{\text{Dach}} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ m}$
- Zerlege den Dachstock in ein Prisma in der Mitte und zwei gleiche Pyramiden an den Enden.
- Prisma: Dreieck (Grundseite 8 m, Höhe 3 m) mal Länge 16 m: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot 16 = 192 \text{ m}^3$
- Pyramide: Grundfläche $12 \cdot 8$, Höhe 3 m: $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 3 = 96 \text{ m}^3$
- $V = 192 + 2 \cdot 96 = 384 \text{ m}^3$

10 Rhombus konstruieren

2 Punkte

Ergebnis: Konstruktion siehe Abbildung

Idee: Im Rhombus ist die Diagonale AC eine Symmetrieachse, und die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. Spiegelt man P an g , landet der Bildpunkt auf der Seite AD .

Variante 1: 1. P an g spiegeln, Bildpunkt P' . 2. Die Gerade durch P' und R schneidet g im Punkt A . 3. Senkrechte s zu g durch Q zeichnen (darauf liegt die Diagonale BD). 4. s schneidet die Gerade $P'R$ im Punkt D . 5. s schneidet die Gerade PA im Punkt B . 6. A an s spiegeln, Bildpunkt C (auf g).

Variante 2: Gleich, aber R an g spiegeln zu R' . Die Gerade PR' schneidet g in A , s schneidet PR' in B und RA in D .

11 Bäume und Zaunpfosten am Veloweg

3 Punkte

a) Ergebnis: 1050 m

- Baum und Pfosten stehen auf gleicher Höhe an jedem gemeinsamen Vielfachen von 42 und 15.
- Primfaktoren: $15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $\text{kgV}(15, 42) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \text{ m}$
- Die Stellen liegen bei 210 m, 420 m, 630 m, 840 m, 1050 m, ... Das erste Vielfache über 1000 m ist $5 \cdot 210 = 1050 \text{ m}$.

b) Ergebnis: 9 m

- Baum und Pfosten treffen sich alle 210 m (siehe a). Bei 210 m und 420 m darf also noch kein grauer Punkt liegen, bei 630 m schon.
- Primfaktoren: $15 = 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

- 630 enthält den Faktor 3 zweimal, 210 und 420 nur einmal. Damit 630 das erste gemeinsame Vielfache ist, muss x den Primfaktor 3 zweimal enthalten, also ein Vielfaches von 9 sein.
- Das kleinste solche x ist 9 m ($630 : 9 = 70$, aber 210 und 420 sind nicht durch 9 teilbar).