

Mathematik

90 Minuten · 10 Aufgaben · 44 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 Solar II oder SHARP EL-501 T
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösbar

1 Gemischte Grundaufgaben

10 Punkte

- a) Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

$$2y \cdot (xy + 3y^2)$$

Term: _____

- b) Vereinfache den Term so weit wie möglich.

$$(6a \cdot 8b - 8b \cdot 2a) : 2$$

Term: _____

- c) Berechne den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) von 54 und 252.

ggT: _____

- d) Schreibe die Zahl mit Hilfe einer Zehnerpotenz, sodass vor dem Dezimalpunkt nur eine Ziffer $\neq 0$ steht.

Beispiel: $7.8 \cdot 10^5$ (aber *nicht* $0.78 \cdot 10^6$)

0.0215 Milliarden = _____

Zahl: _____

- e) Klammere so viel wie möglich aus.

$$15a^2b + 35ab^2$$

Term: _____

- f) Löse den Term nach h auf.

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

$h =$: _____

- g) Ein Liter Benzin kostet x Franken. Der Preis wird um ein Viertel des erhöht. Gib einen Term für den neuen Preis an und vereinfache ihn so weit wie möglich.

Neuer Preis: _____

h) Wandle in mm^3 um.

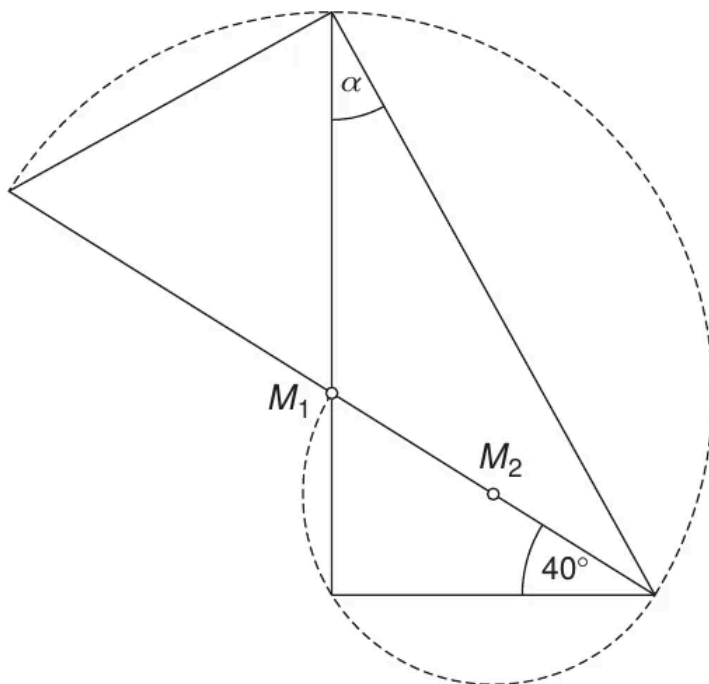
12.4 Liter

Volumen: _____ mm^3

i) M_1

und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden gestrichelt eingezeichneten Halbkreise. Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.

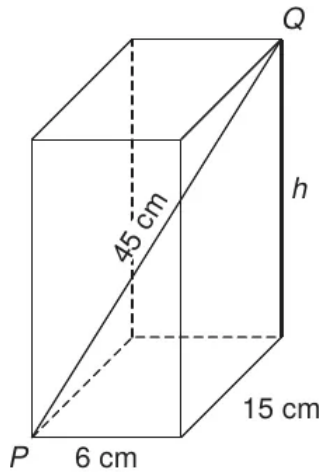
Berechne den Winkel α .



α : _____ °

- j) Ein Quader hat wie abgebildet die Kantenlängen 6 cm und 15 cm. Die Länge der Raumdiagonalen PQ beträgt 45 cm.

Berechne die Länge der Kante h .



h: _____ cm

2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Löse die Gleichungen nach x auf.

a)

$$6 - (14 - 4x) = 2x - 7(2x + 8)$$

x: _____

b)

$$\frac{4x}{5} - \frac{7 + 2x}{3} = \frac{x}{4}$$

X: _____

3 Bruchterme und Wurzeln vereinfachen

4 Punkte

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a)

$$\frac{xz}{2} - \frac{4x^2y}{9z} : \frac{8xy}{3z^2}$$

Term: _____

b)

$$\frac{\sqrt{17x^2 - x^2}}{\sqrt{8x}} \cdot \frac{\sqrt{32x}}{x^2}$$

Term: _____

4 Rechenmauer mit Bruchtermen

3 Punkte

In den folgenden Rechenmauern steht in einem Kästchen immer das *Produkt* der beiden darunterliegenden Kästchen (siehe Beispiel).

Vervollständige die Rechenmauer. Die Resultate müssen *vollständig vereinfacht* sein.

oben: _____

unten links: _____

unten rechts: _____

5 Gleichungen aus Texten aufstellen

3 Punkte

Im Folgenden werden zwei verschiedene Situationen beschrieben. Stelle jeweils eine Gleichung mit der Unbekannten x auf, welche die Situation des Textes beschreibt. Ausser x darf keine weitere Unbekannte in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst und auch *nicht* vereinfacht werden!

- a) Wird eine um 3 verkleinerte Zahl vervierfacht, erhält man 1 weniger, als wenn man das 11-fache der ursprünglichen Zahl um 8 vergrössert. Gesucht ist die ursprüngliche Zahl.

x

: ursprüngliche Zahl

Die Gleichung lautet: _____

- b) Simon besitzt 200 Franken mehr als Nerea. Simon schenkt Nerea 60 Franken. Nun hat Nerea $\frac{5}{9}$ so viele Franken wie Simon. Gesucht ist, wie viele Franken Nerea vor der

Schenkung hatte.

x

: Nereas Geldbetrag in Franken vor der Schenkung

Die Gleichung lautet: _____

6 Vermögen auf zwei Banken

4 Punkte

- a) Cristina hat 40 % ihres Vermögens bei der Bank A und den Rest ihres Vermögens bei der Bank B angelegt.

70 % des Geldes bei der Bank B liegen auf einem Privatkonto und die restlichen CHF 9000 auf einem Sparkonto.

Berechne, wie viel Vermögen Cristina bei der Bank A angelegt hat.

Bank A: _____ CHF

- b) Timur hat 78 % seines Vermögens, nämlich CHF 40 404, bei der Bank A angelegt. Den Rest seines Vermögens hat er bei der Bank B angelegt.

Timur möchte so viel Geld von der Bank A zur Bank B verschieben, dass anschliessend 52 % seines Vermögens bei der Bank B angelegt sind.

Berechne, wie viel Geld Timur dazu von der Bank A zur Bank B verschieben muss.

Betrag: _____ CHF

7**Becken füllen und leeren**

4 Punkte

Ein Becken hat zwei Zuleitungen und zwei Abflüsse. Die beiden unten abgebildeten Graphen zeigen, wie sich das leere Becken füllt, wenn jeweils nur eine der beiden Zuleitungen geöffnet ist und die Abflüsse geschlossen sind. Gitterpunkte, die auf einem Graphen liegen, sind mit kleinen Kreisen markiert.

- a) Das leere Becken wird durch beide Zuleitungen gleichzeitig gefüllt, während beide Abflüsse geschlossen bleiben.

Zeichne den entsprechenden Graphen im folgenden Diagramm ein.

Markiere Gitterpunkte, die auf dem Graphen liegen, mit einem kleinen Kreis.

b) Beide Zuleitungen sind geschlossen.

Der unten links abgebildete Graph zeigt, wie sich das volle Becken entleert, wenn nur Abfluss 1 geöffnet ist.

Der unten rechts abgebildete Graph zeigt, wie sich das volle Becken entleert, wenn beide Abflüsse gleichzeitig geöffnet sind.

Zeichne im folgenden Diagramm den Graphen ein, der zeigt, wie sich das volle Becken entleert, wenn nur Abfluss 2 geöffnet ist.

Markiere Gitterpunkte, die auf dem Graphen liegen, mit einem kleinen Kreis.

c) Das Becken ist voll. Alle Zuleitungen und Abflüsse sind geschlossen.

Um 12:00 Uhr wird Abfluss 1 geöffnet.

Um 14:00 Uhr werden beide Zuleitungen geöffnet. Abfluss 1 bleibt weiterhin offen.

Berechne, um welche Uhrzeit das Becken wieder voll ist.

Antwort: Das Becken ist um _____ Uhr wieder voll.

Uhrzeit: _____ Uhr

8**Zwei Glücksräder drehen**

4 Punkte

Die Glücksräder A und B sind mit den Zahlen 1 bis 3 beschriftet, wie in der Abbildung dargestellt.

Bei Glücksrad A sind die Felder 1 und 2 je halb so gross wie Feld 3.

Bei Glücksrad B sind alle drei Felder gleich gross.

Beide Glücksräder werden gleichzeitig einmal gedreht und anschliessend werden die erhaltenen Zahlen addiert.

Die Abbildung zeigt eine Situation mit der Summe 5.

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 4 beträgt.

Wahrscheinlichkeit: _____

- b) In einer Spielrunde werden die beiden Glücksräder gleichzeitig gedreht und es werden beide erhaltenen Zahlen addiert.

Es werden sehr viele Spielrunden durchgeführt. Dabei wird 451-mal die Summe 5 oder 6 gezählt.

Wurden eher 812, 1091, 1540, 1834 oder 2023 Spielrunden durchgeführt? Entscheide mit Hilfe einer Rechnung.

Anzahl Spielrunden (812 / 1091 / 1540 / 1834 / 2023): _____

9 Trapez und Punktspiegelung im Koordinatensystem

5 Punkte

In der ganzen Aufgabe dürfen keine Lösungen auf Messungen beruhen.

- a1) Das Trapez $ABCD$ liegt wie abgebildet im Koordinatensystem. Die Koordinaten der Ecken A , B , C und D sind ganzzahlig.

Berechne die Länge der Seite AB .

AB: _____ cm

- a2) Der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ beträgt 44 cm^2 .

Berechne die Länge der Höhe h .

h: _____ cm

- b) Das Viereck $ABCD$ liegt wie abgebildet im Koordinatensystem. Die Koordinaten der Ecken A , B , C und D sind ganzzahlig.

Das Viereck $ABCD$ wird an einem Punkt P gespiegelt; man erhält das Viereck $A'B'C'D'$. Der Punkt D' hat die Koordinaten $(2 \mid -7)$.

Bestimme die Koordinaten des Punktes B' .

x-Koordinate von B': _____

y-Koordinate von B': _____

10 Dreieck in einem Würfelkörper

3 Punkte

Der abgebildete Körper ist aus Würfeln zusammengesetzt. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 1 cm.

a) Berechne die Länge der Strecke BC .

BC: _____ cm

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Fläche: _____ cm^2

Lösungen

Gymiprüfung 2023 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

1 Gemischte Grundaufgaben

10 Punkte

a) **Ergebnis:** $2xy^2 + 6y^3$

Multipliziere $2y$ mit jedem Summanden in der Klammer:

- $2y \cdot xy = 2xy^2$
- $2y \cdot 3y^2 = 6y^3$

Also: $2y \cdot (xy + 3y^2) = 2xy^2 + 6y^3$

b) **Ergebnis:** $16ab$

- In der Klammer: $6a \cdot 8b = 48ab$ und $8b \cdot 2a = 16ab$
- $48ab - 16ab = 32ab$
- $32ab : 2 = 16ab$

c) **Ergebnis:** $\text{ggT}(54, 252) = 18$

Zerlege beide Zahlen in Primfaktoren:

- $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
- $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Gemeinsam sind $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

d) **Ergebnis:** $2.15 \cdot 10^7$

- 1 Milliarde $= 10^9$
- $0.0215 \cdot 10^9 = 21\,500\,000$
- Komma so verschieben, dass nur eine Ziffer davor steht: $2.15 \cdot 10^7$

e) **Ergebnis:** $5ab(3a + 7b)$

- Grösster gemeinsamer Faktor der Zahlen: $\text{ggT}(15, 35) = 5$
- Beide Summanden enthalten mindestens ein a und ein $b \rightarrow 5ab$ ausklammern
- $15a^2b : 5ab = 3a$ und $35ab^2 : 5ab = 7b$

Also: $15a^2b + 35ab^2 = 5ab(3a + 7b)$

f) **Ergebnis:** $h = \frac{2 \cdot A}{g} = 2 \cdot A : g$

- Beide Seiten mal 2: $2A = g \cdot h$
- Beide Seiten durch g : $h = \frac{2A}{g}$

g) **Ergebnis:** $x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4} = 1.25x$

- Ein Viertel des Preises ist $\frac{x}{4}$.
- Neuer Preis: $x + \frac{x}{4} = \frac{4x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4} = 1.25x$

h) **Ergebnis:** $12.4\text{ l} = 12\,400\,000\text{ mm}^3$

- $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$, also $12.4\text{ l} = 12.4\text{ dm}^3$
- $1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$: $12.4\text{ dm}^3 = 12\,400\text{ cm}^3$
- $1\text{ cm}^3 = 1000\text{ mm}^3$: $12\,400\text{ cm}^3 = 12\,400\,000\text{ mm}^3$

i) **Ergebnis:** $\alpha = 25^\circ$

- Der kleine Halbkreis hat den Mittelpunkt M_2 und den Durchmesser von M_1 bis zur Ecke rechts unten. Die Ecke links unten liegt auf diesem Halbkreis, also ist dort nach Thales ein rechter Winkel.
- Im kleinen rechtwinkligen Dreieck unten ist der Winkel bei M_1 deshalb $180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
- Nebenwinkel bei M_1 (zwischen der senkrechten Strecke nach oben und der Strecke zur Ecke rechts unten): $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
- Der grosse Halbkreis hat den Mittelpunkt M_1 . Die obere Ecke und die Ecke rechts unten liegen beide darauf, also sind beide Strecken von M_1 aus Radien und gleich lang. Das Dreieck ist gleichschenkelig.
- Basiswinkel: $\alpha = (180^\circ - 130^\circ) : 2 = 25^\circ$

j) **Ergebnis:** $h = 42 \text{ cm}$

Für die Raumdiagonale gilt $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$. Also:

$$h = \sqrt{45^2 - 6^2 - 15^2} = \sqrt{2025 - 36 - 225} = \sqrt{1764} = 42 \text{ cm}$$

2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -3$

- Klammern auflösen: $6 - 14 + 4x = 2x - 14x - 56$
- Zusammenfassen: $4x - 8 = -12x - 56$
- $+12x$ und $+8$: $16x = -48$
- $x = -3$

b) **Ergebnis:** $x = -20$

- Mit dem Hauptnenner 60 multiplizieren: $48x - 20(7 + 2x) = 15x$
- Klammer auflösen (Minus vor dem Bruchstrich beachten!): $48x - 140 - 40x = 15x$
- Zusammenfassen: $8x - 140 = 15x$
- $-8x$: $-140 = 7x$, also $-7x = 140$
- $x = -20$

3 Bruchterme und Wurzeln vereinfachen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{xz}{3}$

Punkt vor Strich: Zuerst die Division, durch einen Bruch dividieren heisst mit dem Kehrwert multiplizieren.

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{4x^2y}{9z} \cdot \frac{3z^2}{8xy} = \frac{x}{3} \cdot \frac{z}{2} = \frac{xz}{6} \\ \bullet \quad & \frac{xz}{2} - \frac{xz}{6} = \frac{3xz}{6} - \frac{xz}{6} = \frac{2xz}{6} = \frac{xz}{3} \end{aligned}$$

b) **Ergebnis:** $\frac{8}{x}$

- Unter der ersten Wurzel zusammenfassen: $17x^2 - x^2 = 16x^2$, also $\sqrt{16x^2} = 4x$

- Die beiden anderen Wurzeln zusammennehmen: $\frac{\sqrt{32x}}{\sqrt{8x}} = \sqrt{\frac{32x}{8x}} = \sqrt{4} = 2$
- Zusammen: $\frac{4x}{x^2} \cdot 2 = \frac{4}{x} \cdot 2 = \frac{8}{x}$

4 Rechenmauer mit Bruchtermen

3 Punkte

Ergebnis: oben: $-\frac{x}{8}$; unten links: $-\frac{2x}{5y}$; unten rechts: $\frac{5y}{9x^2}$

- **Oben:** Produkt der beiden Kästchen in der Mitte: $\frac{-3x^2}{10y} \cdot \frac{5y}{12x} = \frac{-15x^2y}{120xy} = -\frac{x}{8}$
- **Unten links:** Gesuchtes Kästchen mal $\frac{3x}{4}$ ergibt $\frac{-3x^2}{10y}$. Also dividieren: $\frac{-3x^2}{10y} : \frac{3x}{4} = \frac{-3x^2}{10y} \cdot \frac{4}{3x} = -\frac{2x}{5y}$
- **Unten rechts:** $\frac{5y}{12x} : \frac{3x}{4} = \frac{5y}{12x} \cdot \frac{4}{3x} = \frac{5y}{9x^2}$

5 Gleichungen aus Texten aufstellen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $4 \cdot (x - 3) + 1 = 11x + 8$

- Um 3 verkleinerte Zahl, vervierfacht: $4 \cdot (x - 3)$
- Das 11-fache um 8 vergrössert: $11x + 8$
- Die linke Seite ist um 1 kleiner. Damit beide Seiten gleich sind, musst du links 1 addieren: $4 \cdot (x - 3) + 1 = 11x + 8$

Gleichwertig ist z. B. auch $4 \cdot (x - 3) = 11x + 8 - 1$.

b) **Ergebnis:** $\frac{5}{9}(x + 200 - 60) = x + 60$

- Vorher: Nerea hat x , Simon hat $x + 200$.
- Nachher: Nerea hat $x + 60$, Simon hat $x + 200 - 60$.
- Nerea hat $\frac{5}{9}$ von Simons Betrag: $\frac{5}{9}(x + 200 - 60) = x + 60$

6 Vermögen auf zwei Banken

4 Punkte

a) **Ergebnis: CHF 20'000**

- Das Sparkonto sind die restlichen 30 % von Bank B: $30 \% \hat{=} 9000$
- Also Bank B total: $100 \% \hat{=} 9000 : 0.3 = 30\,000$
- Bank B ist 60 % des Vermögens ($100 \% - 40 \%$): $60 \% \hat{=} 30\,000$, also $10 \% \hat{=} 5000$
- Bank A: $40 \% \hat{=} 20\,000$ CHF

b) **Ergebnis: CHF 15'540**

- Gesamtvermögen: $40\,404 : 0.78 = 51\,800$
- Bank B jetzt (22 %): $51\,800 - 40\,404 = 11\,396$
- Bank B nachher (52 %): $0.52 \cdot 51\,800 = 26\,936$
- Zu verschieben: $26\,936 - 11\,396 = 15\,540$ CHF

7 Becken füllen und leeren

4 Punkte

a) **Ergebnis: Gerade von $(0 \mid 0)$ durch den Gitterpunkt $(2 \mid 90)$ bis 100 %, danach waagrecht bei 100 %.**

- Zuleitung 1 füllt 20 % pro Stunde (100 % in 5 h), Zuleitung 2 füllt 25 % pro Stunde (100 % in 4 h).
- Zusammen: $20 \% + 25 \% = 45 \%$ pro Stunde.
- Der Graph ist eine Gerade durch $(0 \mid 0)$ und $(2 \mid 90)$. Das sind die einzigen Gitterpunkte darauf.
- Voll ist das Becken nach $100 : 45 \approx 2.2$ h, danach bleibt der Graph bei 100 %.

b) **Ergebnis: Gerade von $(0 \mid 100)$ über $(1 \mid 60)$ und $(2 \mid 20)$ bis $(2.5 \mid 0)$.**

- Abfluss 1 allein: 30 % pro Stunde ($100 \rightarrow 70 \rightarrow 40 \rightarrow 10$).
- Beide Abflüsse zusammen: 70 % pro Stunde ($100 \rightarrow 30$).
- Abfluss 2 allein: $70 \% - 30 \% = 40 \%$ pro Stunde.
- Graph: Gerade von $(0 \mid 100)$ über $(1 \mid 60)$ und $(2 \mid 20)$; leer nach 2.5 h.

c) **Ergebnis: 18:00 Uhr**

- Von 12:00 bis 14:00 Uhr läuft nur Abfluss 1 (30 % pro Stunde): Nach 2 h sind noch $100 \% - 60 \% = 40 \%$ im Becken.

- Ab 14:00 Uhr pro Stunde: $20\% + 25\% - 30\% = 15\%$ mehr Wasser.
- Es fehlen noch 60% : $60\% : 15\% = 4\text{ h}$.
- $14 : 00 + 4\text{ h} = 18 : 00\text{ Uhr}$.

8 Zwei Glücksräder drehen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{1}{3} = 33.\bar{3}\% \approx 0.33$

- Glücksrad A: $P(1) = \frac{1}{4}, P(2) = \frac{1}{4}, P(3) = \frac{1}{2}$. Glücksrad B: jede Zahl $\frac{1}{3}$.
- Summe 4 entsteht durch $(A, B) = (3, 1), (2, 2)$ oder $(1, 3)$.
- $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

Alternativ: Teile Rad A in 4 gleich grosse Felder (1, 2, 3, 3). Dann gibt es $4 \cdot 3 = 12$ gleich wahrscheinliche Fälle, 4 davon haben die Summe 4: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

b) **Ergebnis: Eher 1091 Spielrunden**

- Summe 5 oder 6 entsteht durch $(A, B) = (3, 2), (2, 3)$ oder $(3, 3)$.
- $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \approx 41.7\%$
- Bei x Runden erwartet man $\frac{5}{12}x$ solche Summen: $\frac{5}{12}x = 451$, also $x = 451 \cdot \frac{12}{5} = 1082.4$
- Am nächsten liegt 1091. Kontrolle: $\frac{5}{12} \cdot 1091 \approx 454.6$, bei 812 wären es nur etwa 338, bei 1540 schon etwa 642.

9 Trapez und Punktspiegelung im Koordinatensystem

5 Punkte

a1) Ergebnis: $\overline{AB} = \sqrt{125} \text{ cm} \approx 11.18 \text{ cm}$

- Ablesen: $A(0 | 1), B(10 | 6)$
- Waagrechter Abstand 10, senkrechter Abstand 5
- Pythagoras: $\overline{AB} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \approx 11.18 \text{ cm}$

a2) Ergebnis: $h \approx 4.92 \text{ cm}$

- Ablesen: $C(7 | 10), D(1 | 7)$, also $\overline{CD} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \approx 6.71$
- Mittellinie: $m = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{\sqrt{125} + \sqrt{45}}{2} \approx 8.94$
- Trapezfläche $A = m \cdot h$, also $h = \frac{44}{8.94} \approx 4.92 \text{ cm}$

b) Ergebnis: $B'(-9 | -3)$

- Ablesen: $D(4 | 9), B(15 | 5)$
- Das Zentrum P ist die Mitte zwischen D und D' : $P\left(\frac{4+2}{2} \mid \frac{9+(-7)}{2}\right) = P(3 | 1)$
- Von B nach P : 12 nach links, 4 nach unten. Dasselbe nochmals ab P : $B'(3 - 12 | 1 - 4) = B'(-9 | -3)$

10 Dreieck in einem Würfelkörper

3 Punkte

a) Ergebnis: $\overline{BC} = \sqrt{29} \text{ cm} \approx 5.39 \text{ cm}$

- Die Strecke BC ist die Raumdiagonale eines Quaders. Zähle die Würfelkanten: 4 cm, 2 cm und 3 cm.
- $\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29} \approx 5.39 \text{ cm}$

b) **Ergebnis:** 10 cm^2

- Die Seite AC ist 4 Würfelkanten lang: $\overline{AC} = 4 \text{ cm}$.
- Die Höhe h von B auf AC steht senkrecht auf AC : $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$ (oder $h = \sqrt{29 - 2^2} = 5 \text{ cm}$).
- $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$