Mathematik

90 Minuten · 10 Aufgaben · 37 Punkte

Name: _____

- 90 Minuten
- Taschenrechner erlaubt: TI-30 ECO RS, TI-30X IIS, CASIO FX-82 Solar II oder SHARP EL-501 T
- Kein zusätzliches Notizpapier
- Lösungswege müssen klar ersichtlich sein
- Geometrische Konstruktionen müssen nachvollziehbar sein

---

1 Gemischte Grundaufgaben

10 Punkte

a1) Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

$$\frac{(6xy)^2}{3y}$$

Term: _____

a2) Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

$$\frac{8xy + 12x^2}{4x}$$

Term: _____

b) Berechne das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 42 und 45.

kgV: _____

c) Klammere so viel wie möglich aus.

$$4x^2 \cdot 8y + 12xy^2$$

Term: _____

d) Löse die Gleichung nach x auf.

$$y = \frac{3 - x}{2}$$

x: _____

e) Schreibe in Stunden, Minuten und Sekunden.

$4.72\ \text{h} =$

_____ h _____ min _____ s

Stunden: _____ h

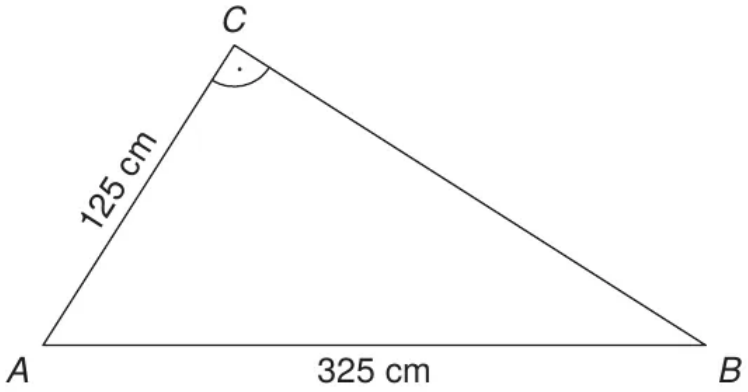
Minuten: _____ min

Sekunden: _____ s

f) Zwei gewöhnliche Spielwürfel (Augenzahlen von 1 bis 6) werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei eine 2 und eine 3 gewürfelt wird.

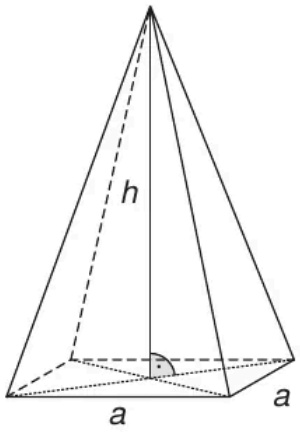
Wahrscheinlichkeit: _____

g) Berechne den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC in cm^2.

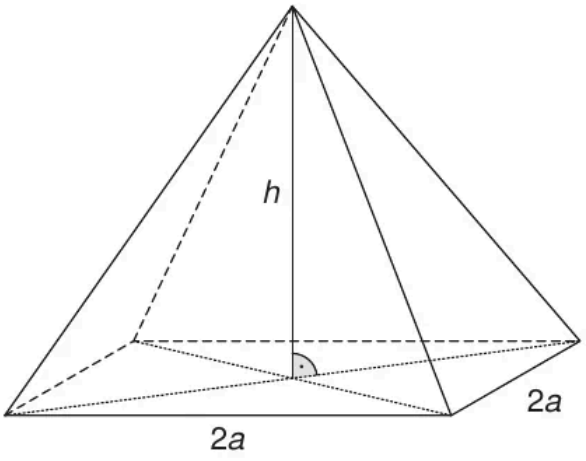


Flächeninhalt: _____ cm²

h) Die beiden abgebildeten quadratischen Pyramiden A und B haben die gleiche Höhe. Das Volumen der Pyramide A beträgt 50 cm^3. Berechne das Volumen der Pyramide B in cm^3.



Pyramide A

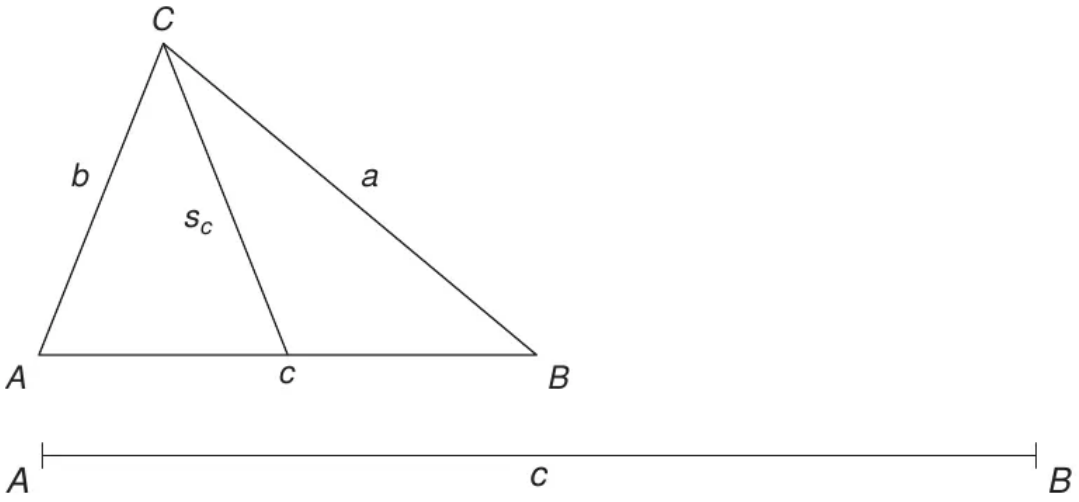


Pyramide B

Volumen B: _____ cm³

i) Von einem Dreieck ABC kennt man die Seite c, die Schwerlinie $s_c = 8$ cm sowie den Winkel $\beta = 70^\circ$.

Die Seite $c = AB$ ist unten bereits vorgegeben. Konstruiere den Rest des Dreiecks ABC. Deine Konstruktionsschritte müssen ersichtlich sein.



2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

Löse die Gleichungen nach x auf.

a)

$$5x - 2(x + 3) = 8x + (2 - x)$$

x: _____

b)

$$\frac{2}{3} \cdot \left(5x + \frac{1}{4}\right) = 3x + \frac{13}{6}$$

x: _____

---

3 Bruchterme und Wurzeln

4 Punkte

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a)

$$\frac{5ac^2}{6d^2} : \frac{10ac}{9d} + \frac{c}{2d}$$

Term: _____

b)

$$\sqrt{49x^2 + (4x)^2 + (-4x)^2} - \sqrt{2x} \cdot \sqrt{18x}$$

Term: _____

---

4 Gleichungen aufstellen

3 Punkte

Im Folgenden werden drei verschiedene Situationen beschrieben. Stelle jeweils eine Gleichung mit der Unbekannten x auf, welche die Situation des Textes beschreibt. Ausser x darf keine weitere Unbekannte in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst und auch *nicht* vereinfacht werden!

a) Gesucht ist eine Zahl. Das Doppelte der um 3 vergrösserten Zahl ist um 8 grösser als das Vierfache der um 10 verkleinerten Zahl.

x

: gesuchte Zahl

Die Gleichung lautet: _____

b) Ein Becken, das 18 000 Liter Wasser fasst, kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Röhre A liefert doppelt so viel Wasser pro Sekunde wie Röhre B.

Das Becken ist leer. Beide Röhren werden während 250 s geöffnet, dann wird Röhre A geschlossen, während Röhre B noch weitere 85 s offen bleibt. Nun ist das Becken voll.

Gesucht ist die Anzahl Liter Wasser, die Röhre B pro Sekunde liefert.

x

: Anzahl Liter Wasser, die Röhre B pro Sekunde liefert

Die Gleichung lautet: _____

c) Familie Jegen hat 4000 Einheiten Strom verbraucht. Dabei hat sie eine Mischung aus Ökostrom (CHF 0.33 pro Einheit) und Graustrom (CHF 0.28 pro Einheit) bezogen. Dafür bezahlt Familie Jegen CHF 1200. Wie viele Einheiten Ökostrom hat sie bezogen?

x

: Anzahl Einheiten Ökostrom

Die Gleichung lautet: _____

5 Gemüse und Getränkemischung

3 Punkte

a) Ein Bauer liefert 56 kg Karotten und 104 kg Bohnen. Von dieser Lieferung können 47 kg Karotten und 65 kg Bohnen verkauft werden. Berechne den Anteil Karotten am nicht verkauften Gemüse. Gib das Ergebnis in Prozent oder als Bruch an.

Anteil Karotten: _____

b) Nino mischt Sirup und Wasser und erhält so 4 Liter Getränkemischung. Die Mischung besteht zu 15 % aus Sirup und zu 85 % aus Wasser. Lea hätte lieber eine Getränkemischung, die nur zu 8 % aus Sirup besteht. Berechne, wie viele Liter Wasser Lea zur bestehenden Getränkemischung giessen muss, um dies zu erreichen.

Wasser: _____ Liter

6 Füllgraph eines Gefässes

2 Punkte

In Abbildung 1 ist ein prismenförmiges Gefäss dargestellt. Abbildung 2 zeigt die Ansicht von vorne.

Das leere Gefäss wird mit konstantem Zufluss gefüllt, bis es randvoll ist.

Im Diagramm soll die Füllhöhe h in Abhängigkeit der Zeit t dargestellt werden. Der erste Teil des Graphen ist bereits eingezeichnet. Vervollständige den Graphen. Entnimm die nötigen Massangaben der Abbildung 2.

7 Kugeln aus zwei Töpfen

3 Punkte

a) Im Topf A liegen 2 rote und 3 blaue Kugeln.

Im Topf B liegen 1 rote, 1 blaue und 2 grüne Kugeln.

Es wird aus jedem Topf zufällig eine Kugel gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

Wahrscheinlichkeit: _____

b) Im Topf A liegen wieder 2 rote und 3 blaue Kugeln.

Im Topf B liegen wieder 1 rote, 1 blaue und 2 grüne Kugeln.

Es wird eine bestimmte Anzahl grüner Kugeln in den Topf A dazugelegt. Dann wird wieder aus jedem Topf zufällig eine Kugel gezogen.

Berechne, wie viele grüne Kugeln man in den Topf A legen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, aus Topf A und Topf B je eine grüne Kugel zu ziehen, $\frac{3}{16}$ beträgt. Begründe deine Antwort mit einer Rechnung oder einer Skizze.

Anzahl grüne Kugeln: _____

---

8 Höhe im Parallelenviereck

2 Punkte

Einem Rechteck ist ein Parallelenviereck einbeschrieben. Berechne die Länge der Höhe h des Parallelenvierecks. Die Abbildung ist nicht massstabsgetreu.

h: _____ cm

9 Zwei Gebäude im Gitternetz

3 Punkte

Unten ist ein Plan mit zwei Gebäuden abgebildet. Das kleine Gebäude ist ein Quader, das grosse ist ein Prisma. Der Abstand zwischen zwei Gitternetzlinien beträgt 10 m.

a) Berechne das Volumen des grossen Gebäudes in m^3.

Volumen: _____ m³

b) Die Punkte M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte. Berechne die Länge der Strecke von M_1 zu M_2 in m.

Länge: _____ m

c) Die Strecke von P zu Q misst 78 m. Berechne, wie viele Meter über dem Boden der Punkt Q liegt.

Höhe: _____ m

---

10 Planeten auf Kreisbahnen

3 Punkte

a) Die Planeten A und B umkreisen den Stern S im Uhrzeigersinn. Mittelpunkt beider Bahnen ist der Stern S.

Für eine Umkreisung benötigt der Planet A 360 Tage, der Planet B 900 Tage.

Abbildung 1 zeigt die Ausgangslage der drei Himmelskörper. Abbildung 2 zeigt die Lage der drei Himmelskörper 45 Tage später.

(Die Abbildungen sind nicht massstabsgetreu.)

Berechne den Winkel α aus Abbildung 2.

α: _____ °

b) Auch die Planeten C und D umkreisen den Stern S im Uhrzeigersinn. Mittelpunkt beider Bahnen ist der Stern S.

Für eine Umkreisung benötigt der Planet D 180 Tage. Der Planet C benötigt dafür weniger lang.

Abbildung 3 zeigt die Ausgangslage der drei Himmelskörper. Abbildung 4 zeigt die Lage der drei Himmelskörper 90 Tage später.

(Die Abbildungen sind nicht massstabsgetreu.)

Berechne, wie viele Tage der Planet C für eine Umkreisung des Sterns benötigt.

Es gibt mehrere Lösungen. Du brauchst nur eine anzugeben.

Tage: _____ Tage

Lösungen

Gymiprüfung 2024 Mathematik Kurzgymnasium. Lösungswege von Fokus Nachhilfe nach der offiziellen Lösung des Kantons.

---

1 Gemischte Grundaufgaben

10 Punkte

a1) **Ergebnis:** $12x^2y$

- Zähler ausrechnen: $(6xy)^2 = 36x^2y^2$
- Kürzen: $\frac{36x^2y^2}{3y} = 12x^2y$

a2) **Ergebnis:** $2y + 3x$

- Jeden Summanden einzeln durch $4x$ teilen: $\frac{8xy}{4x} + \frac{12x^2}{4x}$
- $= 2y + 3x$

b) **Ergebnis: 630**

- Primfaktoren: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, 45 = 3^2 \cdot 5$
- Jeden Faktor in der höchsten vorkommenden Potenz nehmen: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$

c) **Ergebnis:** $4xy(8x + 3y)$

- Zuerst ausmultiplizieren: $4x^2 \cdot 8y = 32x^2y$
- Gemeinsam in $32x^2y$ und $12xy^2$ ist $4xy$.
- $32x^2y + 12xy^2 = 4xy(8x + 3y)$

d) **Ergebnis:** $x = 3 - 2y$ **(oder ein gleichwertiger Term, z. B.** $x = \frac{2y-3}{-1}$**)**

- Mit 2 multiplizieren: $2y = 3 - x$
- x auf die linke, $2y$ auf die rechte Seite bringen: $x = 3 - 2y$

e) **Ergebnis: 4 h 43 min 12 s**

- Ganze Stunden: 4 h, Rest $0.72\ \text{h}$
- $0.72 \cdot 60 = 43.2\ \text{min} \rightarrow$ 43 min, Rest $0.2\ \text{min}$
- $0.2 \cdot 60 = 12\ \text{s}$

f) **Ergebnis:** $\frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.0\overline{5} \approx 5.6\,\%$

- Es gibt $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Ergebnisse.
- Günstig sind (2, 3) und (3, 2), also 2 Ergebnisse.

- $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 5.6\,\%$

g) **Ergebnis:** $18'750\ \text{cm}^2$

- Der rechte Winkel liegt bei C, also ist $AB = 325$ cm die Hypotenuse.
- Pythagoras: $BC = \sqrt{325^2 - 125^2} = \sqrt{90000} = 300$ cm
- $A = \frac{125 \cdot 300}{2} = 18'750\ \text{cm}^2$

h) **Ergebnis:** $200\ \text{cm}^3$

- $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$; die Höhe ist gleich.
- Grundfläche A: a^2, Grundfläche B: $(2a)^2 = 4a^2$, also 4-mal so gross.
- $V_B = 4 \cdot 50 = 200\ \text{cm}^3$

i) **Ergebnis: Konstruktion siehe Abbildung**

- Die Schwerlinie s_c geht von C zum Mittelpunkt M_c der Seite c.
- Mittelpunkt M_c von AB konstruieren (Mittelsenkrechte).
- Kreis k um M_c mit Radius 8 cm zeichnen: Darauf liegt C.
- In B den Winkel $\beta = 70^\circ$ an AB antragen.
- Der freie Schenkel schneidet k in C. C mit A verbinden.

2 Lineare Gleichungen lösen

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $x = -2$

- Klammern auflösen: $5x - 2x - 6 = 8x + 2 - x$
- Zusammenfassen: $3x - 6 = 7x + 2$
- $-4x = 8$, also $4x = -8$
- $x = -2$

b) **Ergebnis:** $x = 6$

- Ausmultiplizieren: $\frac{10x}{3} + \frac{1}{6} = 3x + \frac{13}{6}$
- Mit 6 multiplizieren, damit die Brüche verschwinden: $20x + 1 = 18x + 13$
- $2x = 12$
- $x = 6$

3 Bruchterme und Wurzeln

4 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{5c}{4d}$

- Punkt vor Strich: zuerst dividieren, d. h. mit dem Kehrwert multiplizieren: $\frac{5ac^2}{6d^2} \cdot \frac{9d}{10ac} = \frac{c}{2d} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3c}{4d}$
- Addieren: $\frac{3c}{4d} + \frac{c}{2d} = \frac{3c}{4d} + \frac{2c}{4d} = \frac{5c}{4d}$

b) **Ergebnis:** $3x$

- Quadrate ausrechnen: $(4x)^2 = 16x^2$ und $(-4x)^2 = 16x^2$
- Erste Wurzel: $\sqrt{49x^2 + 16x^2 + 16x^2} = \sqrt{81x^2} = 9x$
- Wurzeln zusammenfassen: $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{18x} = \sqrt{36x^2} = 6x$
- $9x - 6x = 3x$

4 Gleichungen aufstellen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $2 \cdot (x + 3) - 8 = 4(x - 10)$

- Das Doppelte der um 3 vergrösserten Zahl: $2 \cdot (x + 3)$
- Das Vierfache der um 10 verkleinerten Zahl: $4(x - 10)$

- Der erste Term ist um 8 grösser, also muss man 8 abziehen, damit beide gleich sind: $2 \cdot (x + 3) - 8 = 4(x - 10)$

b) **Ergebnis:** $250x + 250 \cdot 2x + 85x = 18000$

- Röhre B liefert x Liter pro Sekunde, Röhre A $2x$.
- In 250 s: B liefert $250x$, A liefert $250 \cdot 2x$.
- Danach liefert B allein noch $85x$.
- Zusammen ergibt das das volle Becken: $250x + 250 \cdot 2x + 85x = 18000$

c) **Ergebnis:** $0.33x + 0.28(4000 - x) = 1200$

- Ökostrom: x Einheiten, kosten $0.33x$ Franken.
- Graustrom: die restlichen $4000 - x$ Einheiten, kosten $0.28(4000 - x)$ Franken.
- Zusammen 1200 Franken: $0.33x + 0.28(4000 - x) = 1200$

---

5 Gemüse und Getränkemischung

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $18.75\,\% = 0.1875 = \frac{3}{16}$

- Nicht verkaufte Karotten: $56 - 47 = 9$ kg
- Nicht verkaufte Bohnen: $104 - 65 = 39$ kg
- Nicht verkauftes Gemüse total: $9 + 39 = 48$ kg
- Anteil Karotten: $\frac{9}{48} = \frac{3}{16} = 18.75\,\%$

b) **Ergebnis: 3.5 Liter**

Die Sirupmenge bleibt gleich, nur Wasser kommt dazu.

- Sirup bei Nino: $15\,\%$ von 4 l $= 0.6$ l, Wasser: 3.4 l
- Bei Lea sind diese 0.6 l Sirup nur noch $8\,\%$. Die ganze Mischung ist also $0.6 : 0.08 = 7.5$ l.
- Wasser bei Lea: $7.5 - 0.6 = 6.9$ l
- Dazugiessen: $6.9 - 3.4 = 3.5$ l

Mit Gleichung: $0.08 \cdot (4 + x) = 0.6 \Rightarrow 0.32 + 0.08x = 0.6 \Rightarrow 0.08x = 0.28 \Rightarrow x = 3.5$

6 Füllgraph eines Gefässes

2 Punkte

Ergebnis: Graph von (0, 0) über (6, 18), (7, 30) bis (11, 46)

Weil das Gefäss ein Prisma ist (überall gleich tief), hängt die Steiggeschwindigkeit nur von der Breite ab: Je schmaler, desto schneller steigt das Wasser.

- Unten (40 cm breit): 18 cm in 6 s, also 3 cm pro Sekunde.
- Mitte (10 cm breit, 4-mal schmaler): 4-mal so schnell, $4 \cdot 3 = 12$ cm/s. Für 12 cm braucht es 1 s $\rightarrow$ Punkt (7, 30).
- Oben (30 cm breit, $\frac{3}{4}$ von 40 cm): $3 \cdot \frac{40}{30} = 4$ cm/s. Für 16 cm braucht es 4 s $\rightarrow$ Punkt (11, 46).
- Die Punkte (6, 18), (7, 30) und (11, 46) mit Strecken verbinden.

7 Kugeln aus zwei Töpfen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** $\frac{3}{4} = 75\,\%$

- Es gibt $5 \cdot 4 = 20$ gleich wahrscheinliche Paare.
- Gleichfarbig sind nur rot-rot ($2 \cdot 1 = 2$) und blau-blau ($3 \cdot 1 = 3$), zusammen 5 Paare.
- Verschiedenfarbig: $20 - 5 = 15$ Paare, also $P = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 75\,\%$

Oder: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{10} = \frac{3}{4}$

b) **Ergebnis: 3 grüne Kugeln**

- Aus Topf B zieht man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ eine grüne Kugel.
- Also muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot P(\text{grün aus A}) = \frac{3}{16}$, d. h. $P(\text{grün aus A}) = \frac{3}{8}$.
- Mit x grünen Kugeln: $\frac{x}{5+x} = \frac{3}{8}$. Das passt für $x = 3$: $\frac{3}{8}$.
- Kontrolle: $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Probieren geht auch: 1 grüne Kugel $\to \frac{2}{24}$, 2 grüne $\to \frac{4}{28}$, 3 grüne $\to \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

8 Höhe im Parallelenviereck

2 Punkte

Ergebnis: $h = \frac{126}{13} \approx 9.7$ **cm**

Idee: Fläche des Parallelenvierecks über das Rechteck berechnen, dann durch die Grundseite teilen.

- Grundseite g (Seite, auf der h senkrecht steht): $g = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm
- Rechteck: $18 \cdot 13 = 234 \text{ cm}^2$
- Die vier Eckdreiecke ergeben zusammen zwei Rechtecke: $12 \cdot 5 = 60$ und $6 \cdot 8 = 48$
- Parallelenviereck: $234 - 60 - 48 = 126 \text{ cm}^2$
- $h = \frac{126}{13} \approx 9.69$ cm

9 Zwei Gebäude im Gitternetz

3 Punkte

a) **Ergebnis:** 63000 m^3

- Die Grundfläche ist ein Trapez. Aus dem Gitter: parallele Seiten 30 m und 60 m, Abstand 20 m.
- $G = \frac{30+60}{2} \cdot 20 = 900 \text{ m}^2$
- $V = G \cdot h = 900 \cdot 70 = 63000 \text{ m}^3$

b) **Ergebnis:** $\sqrt{6800} \approx 82.5$ **m**

- Aus dem Gitter: M_1 und M_2 liegen in beiden Bodenrichtungen je 40 m auseinander.
- Höhenunterschied: $70 - 10 = 60$ m
- Raumdiagonale mit Pythagoras: $\sqrt{40^2 + 40^2 + 60^2} = \sqrt{6800} \approx 82.46$ m

c) **Ergebnis: 28 m**

- Aus dem Gitter: P und der Fusspunkt unter Q liegen in den beiden Bodenrichtungen 70 m und 20 m auseinander.
- Pythagoras im Raum: $78^2 = 70^2 + 20^2 + h^2$

- $h = \sqrt{78^2 - 70^2 - 20^2} = \sqrt{784} = 28$ m

---

10 Planeten auf Kreisbahnen

3 Punkte

a) **Ergebnis:** 27°

- A dreht in 45 Tagen um $360^\circ \cdot \frac{45}{360} = 45^\circ$.
- B dreht in 45 Tagen um $360^\circ \cdot \frac{45}{900} = 18^\circ$.
- Beide starten auf derselben Linie, also $\alpha = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$.

b) **Ergebnis: 60 Tage (eine von mehreren Lösungen; weitere z. B. 36 oder 20 Tage)**

- D braucht 180 Tage pro Runde, nach 90 Tagen hat D also eine halbe Runde (180°) gemacht.
- C steht wieder auf derselben Linie wie D und ist schneller als D. Also hat C mindestens 1.5 Runden gemacht, d. h. 540°.
- $540^\circ \mathrel{\hat{=}} 90$ Tage, also $360^\circ \mathrel{\hat{=}} 90 \cdot \frac{360}{540} = 60$ Tage.
- Weitere Lösungen: 2.5 Runden $\rightarrow 90 : 2.5 = 36$ Tage, 4.5 Runden $\rightarrow$ 20 Tage usw.